

Mircea Ivan

Ariadna Pletea

Teodor Stihî

Gloria Cosovici

Daniela Inoan

Matematică

prin

MATHEMATICA

Editura StudIS

adicenter@yahoo.com

Iasi, Sos. Stefan cel Mare, nr.5

Tel./fax: 0232 – 217.754

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

COORDONATOR: MIRCEA IVAN

Ariadna Pletea, Teodor Stîhi, Gloria Cosovici, Daniela Inoan

Matematică prin "Mathematica" / Mircea Ivan, Ariadna Pletea,

Teodor Stîhi, Gloria Cosovici, Daniela Inoan - Vatra Dornei : StudIS, 2013

Bibliogr.

ISBN 978-606-624-298-1

- I. Mircea Ivan
- II. Ariadna Pletea
- III. Teodor Stîhi
- IV. Gloria Cosovici
- V. Daniela Inoan

Consilier editorial: Dranca Adrian

Secretar editorial: Moroșanu Paul

Pre-press, tipar digital și finisare:

S.C. ADI CENTER SRL

Șos. Ștefan cel Mare, nr. 5

Tel.: 217 754



Copyright © 2013

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate autorului

Cuprins

Prefață	v
I Comenzi ale programului MATHEMATICA	1
1 Comenzi specifice calculului diferențial	3
1.1 Comenzi pentru derivare și diferențiere	3
1.1.1 Comanda <code>Derivative</code>	3
1.1.2 Comanda <code>Dt</code>	9
1.2 Serii	21
1.2.1 Comanda <code>Sum</code>	21
1.2.2 Comanda <code>NSum</code>	21
1.2.3 Serii Taylor	25
1.3 Limite	26
2 Comenzi pentru calcul integral	29
2.1 Comanda <code>Integrate</code>	29

3	Comenzi grafice	37
3.1	Comanda Plot	37
3.2	Comanda ParametricPlot	46
3.3	Comanda ContourPlot	59
3.4	Comanda RegionPlot	67
3.5	Comanda Plot3D	70
3.6	Comanda ParametricPlot3D	71
3.7	Comanda RegionPlot3D	83
3.8	Calcul volume corpuri	96
3.9	Aplicații MATHEMATICA la vizualizarea conicelor	99
4	Culori în MATHEMATICA	107
4.1	Comanda RGBColor	107
4.2	Comanda CMYKColor	107
II	ALGEBRĂ LINIARĂ	121
5	Vectori și matrice	123
5.1	Operații cu vectori și matrice	123
5.2	Operații elementare cu vectori	125
5.3	Rangul și forma canonică (redușă) pe linii a unei matrice $m \times n$	130
6	Subspații vectoriale în \mathbb{R}^n	135
6.1	Subspațiile fundamentale ale matricei reale $m \times n$	135
6.1.1	Subspațiul coloanelor	135
6.1.2	Subspațiul liniilor	140
6.1.3	Nucleul matricei	144
6.2	Incluziunea și egalitatea de subspații	148
6.3	Suma și intersecția a două subspații	152

7	Dependență și independență liniară în spațiul vectorial \mathbb{R}^n	157
8	Elemente de geometrie în \mathbb{R}^n	167
8.1	Lungimi și unghiuri	167
8.2	Ortogonalitatea vectorilor și subspațiilor	169
8.3	Proiecții ortogonale	173
8.4	Baze ortonormate	175
8.5	Matrice ortogonale	179
8.6	Matrice de proiecție	181
9	Aplicația liniară și matrice	183
9.1	Aplicația liniară	183
9.2	Nucleul și imaginea aplicației liniare	187
9.3	Determinarea unei aplicații liniare	188
10	Metoda celor mai mici pătrate	191
10.1	Metoda celor mai mici pătrate și proiecția pe un subspațiu	192
10.2	Pseudoinversa unei matrice $m \times n$	196
10.3	Regresia liniară. Dreapta de regresie	197
11	Valori și vectori proprii	201
11.1	Problema cu valori și vectori proprii	201
11.2	Diagonalizarea matricelor	204
11.3	Aplicații ale diagonalizării matricelor	207
12	Exerciții	213
13	Soluții	231
III	ECUAȚII DIFERENȚIALE	257
14	Ecuatii diferențiale integrabile prin cuadraturi	261

14.1	Ecuatii diferențiale cu variabile separabile	261
14.2	Ecuatii diferențiale omogene	266
14.3	Ecuatii cu diferențială totală exactă	272
14.4	Ecuatia diferențială de ordin întâi liniară	274
14.5	Ecuatii diferențiale care admit factor integrant	276
14.6	Traietorii ortogonale	279
15	Ecuatii diferențiale liniare de ordin n cu coeficienți constanți	285
16	Sisteme diferențiale de ordin întâi cu coeficienți constanți	297
16.1	Rezolvarea sistemelor diferențiale liniare de ordin întâi cu coeficienți constanți	297
16.2	Studiul punctelor singulare	308
17	Transformata Laplace	321
IV	Exemple de rezolvare a unor probleme ingineresti	333
18	Probleme de mecanică exprimabile sub forma unor ecuații diferențiale	335
18.1	Aruncarea oblică în câmp gravitațional (în vid)	335
18.2	Abordarea problemei aruncării în vid cu MATHEMATICA	339
18.3	Aruncarea oblică în câmp gravitațional (în atmosferă)	341
18.4	Abordarea problemei aruncării în atmosferă cu MATHEMATICA	346
18.5	Mișcarea oscilatorului armonic liniar	347
18.6	Abordarea problemei mișcării oscilatorului liniar cu MATHEMATICA	350
18.7	Mișcarea oscilatorului liniar amortizat	351
18.8	Abordarea problemei mișcării oscilatorului liniar amortizat cu MATHEMATICA	354
	Index	357

Prefață

Cartea de față a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, *“Formarea cadrelor didactice universitare și a studenților în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învățare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competențe performante și practice pentru piața muncii”*, finanțat din Fondul Social European și implementat de către Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni și Companii, Universitatea din București, Universitatea Tehnică de Construcții din București, Universitatea “Politehnica” din București, Universitatea din Pitești, Universitatea Tehnică “Gheorghe Asachi” din Iași, Universitatea de Vest din Timișoara, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea “1 Decembrie 1918” din Alba-Iulia. Proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operațional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane POSDRU și se înscrie în domeniul major de intervenție *1.2 Calitate în învățământul superior*.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerințele pieței muncii și crearea de mecanisme și instrumente de extindere a oportunităților de învățare. Evaluarea nevoilor educaționale obiective ale cadrelor didactice și studenților legate de utilizarea matematicii

în învățământul superior, masterate și doctorate precum și analiza eficacității și relevanței curriculumelor actuale la nivel de performanță și eficiență, în vederea dezvoltării de cunoștințe și competențe pentru studenții care învață discipline matematice în universități, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea și armonizarea curriculumelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigențelor de pe piața muncii, elaborarea și implementarea unui program de formare a cadrelor didactice și a studenților interesați din universitățile partenere, bazat pe dezvoltarea și armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne și funcționale pentru predarea-învățarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învățământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns materialul de față.

Formarea de competențe cheie de matematică și informatică presupune crearea unor abilități de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială și inserție pe piața muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea și sprijinirea elevilor și studenților potențial talentați la matematică. Totuși, studiul matematicii a evoluat în exigențe, ajungând să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învățare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilității curriculumei, însoțită de analiza metodelor și instrumentelor folosite pentru identificarea și motivarea studenților talentați la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerințelor de masă, cât și celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societății în legătură cu rolul și locul matematicii în educația de bază, în instrucție și în descoperirile științifice menite să îmbunătățească calitatea vieții, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, și nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmărește evidențierea

a noi motivații solide pentru învățarea și studiul matematicii la nivelele de bază și la nivel de performanță; stimularea creativității și formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise față de însușirea aspectelor specifice din alte științe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter și multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenți ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanță a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

MATHEMATICA este un software pentru calcul matematic. Prin intermediul unei interfețe simple și intuitive este un instrument ideal pentru profesioniștii care au nevoie de soluții rapide ale unor probleme tehnice.

Poate efectua la fel de bine atât calcul numeric, cât și simbolic. Rezolvă ecuații algebrice și diferențiale, calculează derivate, primitive și integrale definite, sume și produse, serii de funcții.

Execută diverse operații asupra matricelor, factorizează polinoame, analizează date, desenează grafice și animații.

Are comenzi de import și export de date, interpolări, transformate Fourier și Laplace, precum și un set quasi-complet de funcții speciale și constante matematice.

O prezentare exhaustivă a programului MATHEMATICA este aproape imposibilă.

Prezenta lucrare își propune introducerea cititorului în folosirea acestui program prin exemplificarea unui subset de comenzi mai des folosite.

Eventuale nedumeriri vor fi lămurite de cititor prin intermediul help-ului bine structurat și complet al programului. În această lucrare s-a folosit versiunea 7 a programului MATHEMATICA.

Repartizarea capitolelor pe autori este următoarea:
partea I, Mircea Ivan, Gloria Cosovici și Daniela Inoan; partea II, Teodor Stih; partea III, Ariadna Pletea; partea IV, Gloria Cosovici.

Partea I

Comenzi ale programului MATHEMATICA

Comenzi specifice calculului diferențial

1.1 Comenzi pentru derivare și diferențiere

1.1.1 Comanda Derivative

1.1.1 Derivative [n_1, n_2, \dots][f][x_1, x_2, \dots]

Calculează derivata

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+\dots}}{\partial x_{n_1} \partial x_{n_2} \dots} f(x_1, x_2, \dots) = f^{(n_1, n_2, \dots)}(x_1, x_2, \dots)$$

Modul de utilizare al comenzii `Derivative` este explicat de următoarele tabele generate cu MATHEMATICA.

```
Grid[{" ", "D[f[x],x]"},
{"StandardForm", StandardForm[D[f[x], x]]},
{"InputForm", InputForm[D[f[x], x]]},
{"TraditionalForm", TraditionalForm[D[f[x], x]]}
, Frame → All]
```

	$D[f[x],x]$
StandardForm	$f'[x]$
InputForm	Derivative[1][f][x]
TraditionalForm	$f'(x)$

```
Grid[{" ", "D[f[x],{x,n}]"},
{"StandardForm", StandardForm[D[f[x], {x, n}]]},
{"InputForm", InputForm[D[f[x], {x, n}]]},
{"TraditionalForm", TraditionalForm[D[f[x], {x, n}]]}
, Frame → All]
```

	$D[f[x],\{x,n\}]$
StandardForm	$f^{(n)}[x]$
InputForm	Derivative[n][f][x]
TraditionalForm	$f^{(n)}(x)$

```
Grid[{{" ", "D[f[x,y],x,y]"},  
{"∂x,yf[x,y] ", ∂x,yf[x, y]},  
{"StandardForm", StandardForm[D[f[x, y], x, y]]},  
{"InputForm", InputForm[D[f[x, y], x, y]]},  
{"TraditionalForm", TraditionalForm[D[f[x, y], x, y]]}}  
, Frame → All]
```

	$D[f[x,y],x,y]$
StandardForm	$f^{(1,1)}[x, y]$
InputForm	Derivative[1, 1][f][x, y]
TraditionalForm	$f^{(1,1)}(x, y)$

```
Grid[{{" ", "D[f[x,y],{x,m},{y,n}]"},  
{"StandardForm", StandardForm[D[f[x, y], {x, m}, {y, n}]]},  
{"InputForm", InputForm[D[f[x, y], {x, m}, {y, n}]]},  
{"TraditionalForm", TraditionalForm[D[f[x, y], {x, m}, {y, n}]]}}  
, Frame → All]
```

	$D[f[x,y],\{x,m\},\{y,n\}]$
StandardForm	$f^{(m,n)}[x, y]$
InputForm	Derivative[m, n][f][x, y]
TraditionalForm	$f^{(m,n)}(x, y)$

```
Grid[{" ", "D[f[x,y],{{x,y}}]",
{"StandardForm", StandardForm[D[f[x, y], {{x, y}}]}},
{"InputForm", InputForm[D[f[x, y], {{x, y}}]}},
{"TraditionalForm", TraditionalForm[D[f[x, y], {{x, y}}]}},
, Frame → All]
```

	$D[f[x,y],\{\{x,y\}\}]$
StandardForm	$\{f^{(1,0)}[x, y], f^{(0,1)}[x, y]\}$
InputForm	$\{\text{Derivative}[1, 0][f][x, y], \text{Derivative}[0, 1][f][x, y]\}$
TraditionalForm	$\{f^{(1,0)}(x, y), f^{(0,1)}(x, y)\}$

```
Grid[{"StandardForm", "Out TraditionalForm"},
{StandardForm["D[f[x],x]", TraditionalForm[D[f[x], x]]},
{StandardForm["D[f[x,y],x]", TraditionalForm[D[f[x, y], x]]},
{StandardForm["D[f[g[x]],x]", TraditionalForm[D[f[g[x]], x]]},
{StandardForm["D[InverseFunction[f][x],x]",
TraditionalForm[D[InverseFunction[f][x], x]]},
{StandardForm["D[x^n,x]", TraditionalForm[D[x^n, x]]},
{StandardForm["D[Sin[x],x]", TraditionalForm[D[Sin[x], x]]},
{StandardForm["Function[x,f[x]]",
TraditionalForm[Function[x, f[x]]]},
{StandardForm["Derivative[1][Function[x,Sin[x]]]",
TraditionalForm[Derivative[1][Function[x, Sin[x]]]},
{StandardForm["Derivative[-1][Function[x,Sin[x]]]",
TraditionalForm[Derivative[-1][Function[x, Sin[x]]]},
{StandardForm["Derivative[-1][Function[x,x^2]]",
TraditionalForm[Derivative[-1][Function[x, x^2]]]},
, Frame → All]
```


StandardForm	Out TraditionalForm
$D[f[x],x]$	$f'(x)$
$D[f[x,y],x]$	$f^{(1,0)}(x,y)$
$D[f[g[x]],x]$	$g'(x)f'(g(x))$
$D[\text{InverseFunction}[f][x],x]$	$\frac{1}{f'(f^{(-1)}[x])}$
$D[x^n,x]$	nx^{n-1}
$D[\text{Sin}[x],x]$	$\cos(x)$
$\text{Function}[x,f[x]]$	$x \mapsto f(x)$
$\text{Derivative}[1][\text{Function}[x,\text{Sin}[x]]]$	$x \mapsto \cos(x)$
$\text{Derivative}[-1][\text{Function}[x,\text{Sin}[x]]]$	$x \mapsto -\cos(x)$
$\text{Derivative}[-1][\text{Function}[x,x^2]]$	$x \mapsto \frac{x^3}{3}$

Atentie la notațiile:

```
Grid[{"StandardForm", "TraditionalForm"},
{StandardForm ["f[x]-1 "], TraditionalForm [f[x]-1]},
{StandardForm ["f-1[x] (* gresit *)"], TraditionalForm [f-1[x]]},
{StandardForm["InverseFunction[f][x] "],
TraditionalForm[InverseFunction[f][x]]},
{StandardForm ["Sin-1[x] (* gresit *)"],
TraditionalForm [Sin(-1)[x]]},
{StandardForm["InverseFunction[Sin][x]"],
TraditionalForm[InverseFunction[Sin][x]]},
Frame → All]
```

StandardForm	TraditionalForm
$f[x]^{-1}$	$\frac{1}{f(x)}$
$f^{-1}[x]$ (* gresit *)	$\frac{1}{f}[x]$
InverseFunction[f][x]	$f^{(-1)}[x]$
$\text{Sin}^{-1}[x]$ (* gresit *)	$\frac{1}{\text{Sin}}[x]$
InverseFunction[Sin][x]	$\sin^{-1}(x)$

1.1.2 Comanda Dt

1.1.2 Comanda Dt – Diferentiala

```
Grid[{" ", "Dt[f[x]]"},
{"StandardForm", StandardForm[Dt[f[x]]]},
{"InputForm", InputForm[Dt[f[x]]]},
{"TraditionalForm", TraditionalForm[Dt[f[x]]]}
, Frame → All]
```

	$Dt[f[x]]$
StandardForm	$Dt[x] f'[x]$
InputForm	$Dt[x] * \text{Derivative}[1][f][x]$
TraditionalForm	$dx f'(x)$

```
Grid[{" ", "Dt[f[x,y]]"},
{"StandardForm", StandardForm[Dt[f[x,y]]]},
{"InputForm", InputForm[Dt[f[x,y]]]},
{"TraditionalForm", TraditionalForm[Dt[f[x,y]]]}
, Frame → All]
```

	$Dt[f[x,y]]$
StandardForm	$Dt[y] f^{(0,1)}[x, y] + Dt[x] f^{(1,0)}[x, y]$
TraditionalForm	$dy f^{(0,1)}(x, y) + dx f^{(1,0)}(x, y)$

```

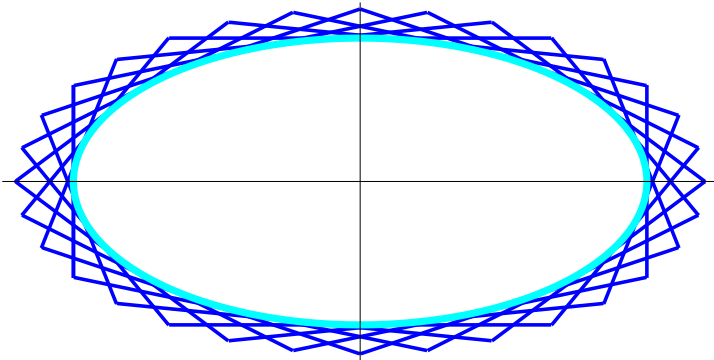
Grid[{"StandardForm", "Out TraditionalForm"},
{StandardForm["Dt[f]"], TraditionalForm[Dt[f]]},
{StandardForm["Dt[x]"], TraditionalForm[Dt[x]]},
{StandardForm["Dt[f,x]"], TraditionalForm[Dt[f, x]]},
{StandardForm["Dt[x,x]"], TraditionalForm[Dt[x, x]]},
{StandardForm["Dt[y,x]"], TraditionalForm[Dt[y, x]]},
{StandardForm["Dt[x y]"], TraditionalForm[Dt[xy]]},
{StandardForm["Dt[x^2 + y^2 + z^2]"],
TraditionalForm[Dt[x^2 + y^2 + z^2]]},
{StandardForm["Dt[f[x],x]"], TraditionalForm[Dt[f[x], x]]}
}, Frame -> All]

```

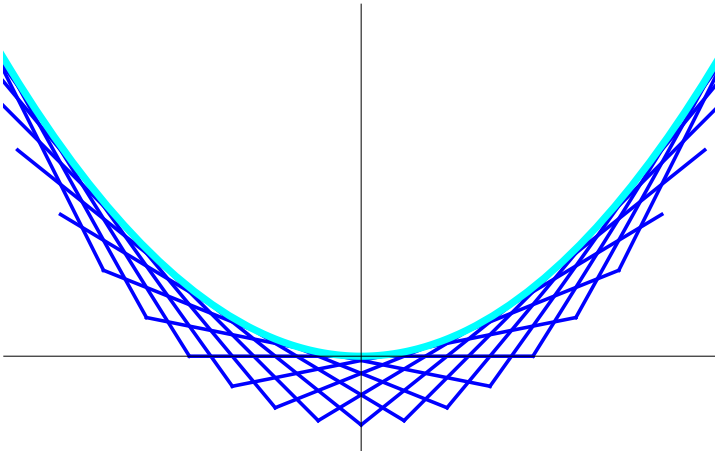
StandardForm	Out TraditionalForm
Dt[f]	df
Dt[x]	dx
Dt[f,x]	$\frac{df}{dx}$
Dt[x,x]	1
Dt[y,x]	$\frac{dy}{dx}$
Dt[x y]	$ydx + xdy$
Dt[x^2 + y^2 + z^2]	$2xdx + 2ydy + 2zdz$
Dt[f[x],x]	$f'(x)$

1.1.3 (* Aplicație: Familia tangentelor la o curbă *)

```
r[x_]:= {2Cos[x], Sin[x]}  
tang[x_, t_]:= r[x] + t r'[x]  
tangente = ParametricPlot[Table[tang[x, t], {x, -π, π, π/16}],  
{t, -.66, .66}, PlotStyle → {Thickness[0.005], Blue},  
Ticks → None];  
curba = ParametricPlot[r[x], {x, -π, π},  
PlotStyle → {Thickness[0.01], Cyan}, Ticks → None];  
Show[tangente, curba]
```



```
r[x.]:= {x, x2}  
tang[x., t.]:=r[x] + t r'[x]  
tangente = ParametricPlot[Table[tang[x, t], {x, -1, 1, 1/10}],  
{t, -.4, .4}, PlotStyle -> {Thickness[0.005], Blue}, Ticks -> None];  
curba = ParametricPlot[r[x], {x, -1, 1},  
PlotStyle -> {Thickness[0.01], Cyan}, Ticks -> None];  
Show[tangente, curba, PlotRange->{{-.8, .8}, {-2, .8}}]
```

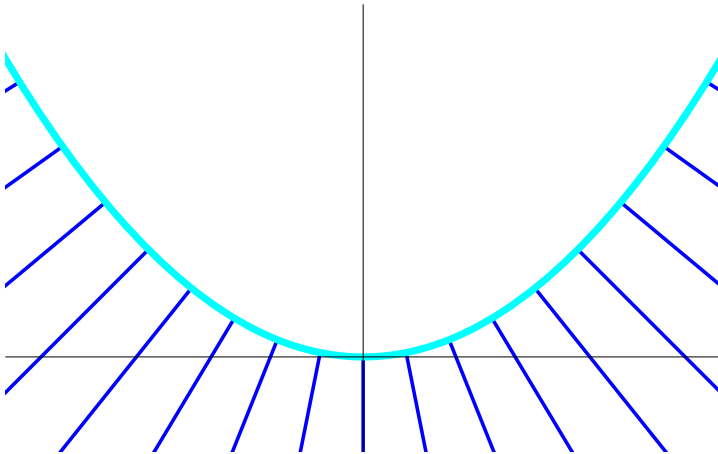


1.1.4 (* Aplicație: Familia normalelor la o curbă *)

```

f[x.]:=x
g[x.]:=x2
r[x.]:= {f[x], g[x]}
n[x.]:= {g'[x], -f'[x]}
tang[x., t.]:=r[x] + t n[x]
tangente = ParametricPlot[Table[tang[x, t], {x, -1, 1, .1}],
{t, 0, .4}, PlotStyle → {Thickness[0.005], Blue}, Ticks → None];
curba = ParametricPlot[r[x], {x, -1, 1},
PlotStyle → {Thickness[0.01], Cyan}, Ticks → None];
Show[tangente, curba, PlotRange->{{-.8, .8}, {-2, .8}}]

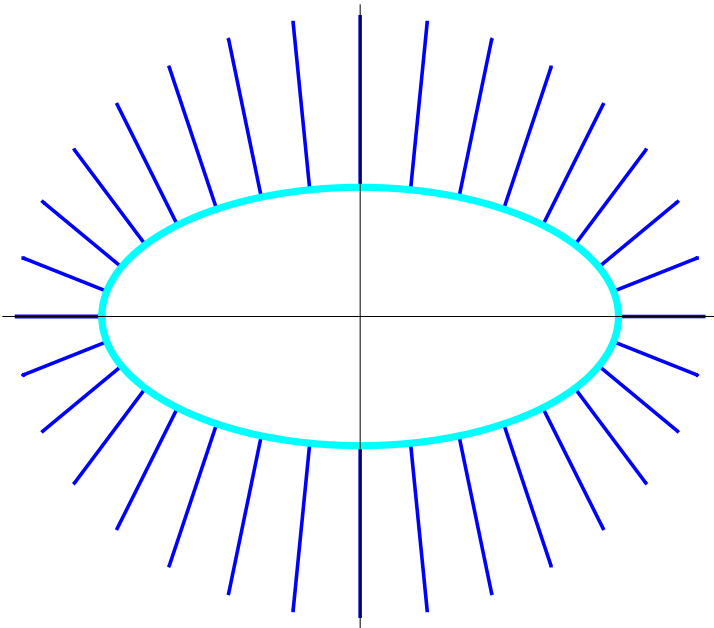
```



```

f[x.]:=2Cos[x]
g[x.]:=Sin[x]
r[x.]:={f[x],g[x]}
n[x.]:={g'[x],-f'[x]}
tang[x_,t.]:=r[x]+t n[x]
tangente = ParametricPlot[Table[tang[x,t],{x,-π,π,π/16}],
{t,0,.66},PlotStyle→{Thickness[0.005],Blue},Ticks→None];
curba = ParametricPlot[r[x],{x,-π,π},
PlotStyle→{Thickness[0.01],Cyan},Ticks→None];
Show[tangente,curba]

```



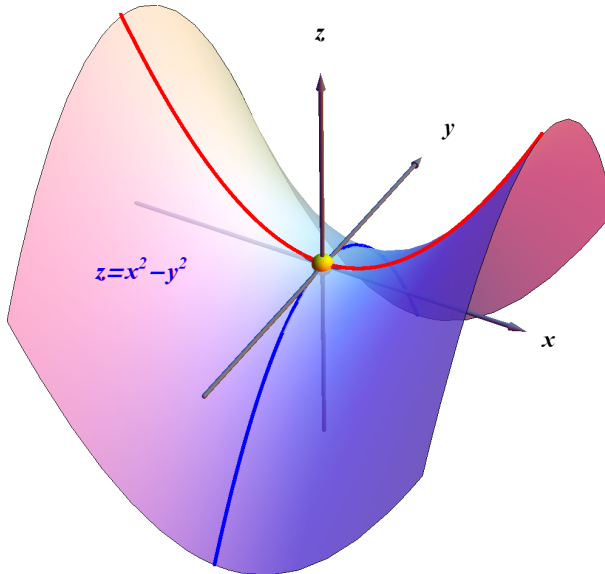
1.1.5 (* Aplicație: Exemplu de punct staționar *)

Prezentăm un exemplu de punct staționar care nu este punct de extrem local.

Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, având ca grafic paraboloidul hiperbolic $z = x^2 - y^2$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 2x = 0 \\ f'_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases} \text{ se obține punctul staționar } (0, 0). \text{ În acest}$$

punct avem $f''_{x^2}(0, 0) \cdot f''_{y^2}(0, 0) < f''_{xy}(0, 0)$, deci $(0, 0)$ este punct staționar pentru f . Aceasta se observă și din reprezentarea grafică a suprafeței.



1.1.6 (* Aplicație: Exemplet de puncte de extrem *)

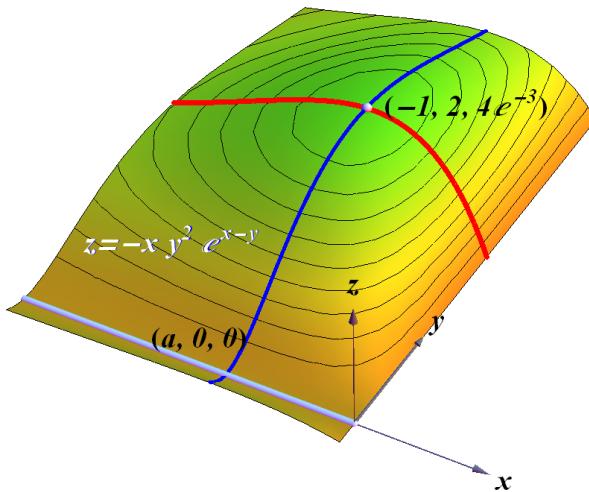
Să determinăm punctele de extrem local ale funcției

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = -xy^2e^{x-y} \text{ cu } x < 0.$$

Rezolvând sistemul
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = -(y^2 + xy^2)e^{x-y} = 0 \\ f'_y(x, y) = -(2xy - xy^2)e^{x-y} = 0 \end{cases}$$
 se obțin punctele staționare $M(-1, 2)$ și $M_a(a, 0)$, cu $a < 0$.

În punctul $(-1, 2)$ avem $d^2f(-1, 2)(h_1, h_2) = -4e^{-3}h_1^2 - 2e^{-3}h_2^2$, negativ definită, deci este vorba despre un punct de maxim local, cu valoarea maximă $f(-1, 2) = 4e^{-3}$.

Pentru punctele $M_a(a, 0)$, $d^2f(a, 0)(h_1, h_2) = -2ae^a h_2^2$ este semidefinită, deci nu se poate decide prin această metodă dacă punctul M_a este de extrem local. În schimb, se observă că $f(a, 0) = 0$ pentru orice $a < 0$ iar $f(x, y) \geq 0$, pentru orice $x < 0, y \in \mathbb{R}$. Deci orice punct $M_a(a, 0)$, $a < 0$, este punct de minim local.



1.1.7 (* Aplicație: Rezolvarea unei ecuații diferențiale *)

Să rezolvăm ecuația diferențială de tip Clairaut $y = x y' + y'^2$.

$$f[p.] := p^2;$$

(* Solutia generala *)

$$y[x] /. DSolve[y[x] == x * y'[x] + f[y'[x]], y[x], x][[1]]$$

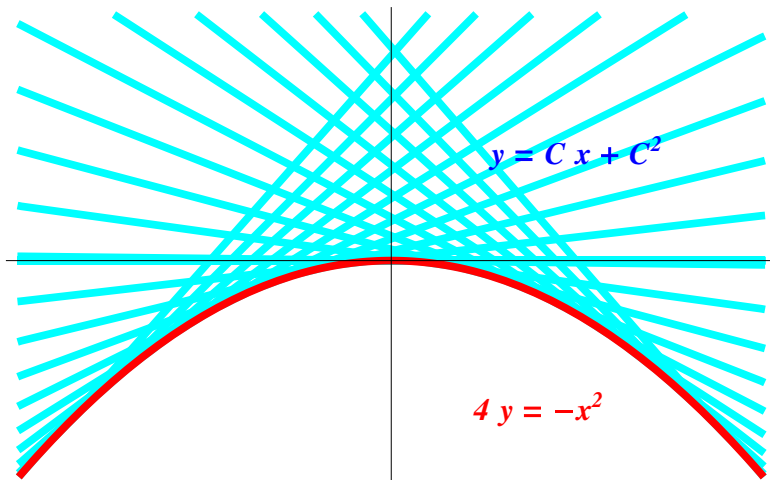
$$xC[1] + C[1]^2$$

(* Solutia singulara *)

$$\text{Eliminate}[\{y == xC[1] + C[1]^2, D[y == xC[1] + C[1]^2, C[1]]\}, C[1]]$$

$$4y == -x^2$$

Deci, **soluția generală** este familia de curbe $\{y = xC + C^2, C \in \mathbb{R}\}$, iar **soluția singulară**, $4y = -x^2$, este înfășurătoarea familiei soluției generale.



1.1.8 (* Aplicație: Rezolvarea unei ecuații diferențiale *)

Să rezolvăm ecuația diferențială de tip Clairaut

$$y = x y' - y' \log y'$$

$$f[p.] := -p \operatorname{Log}[p]$$

(* Soluția generală *)

$$y[x] /. \text{DSolve}[y[x] == x * y'[x] + f[y'[x]], y[x], x][[1]]$$

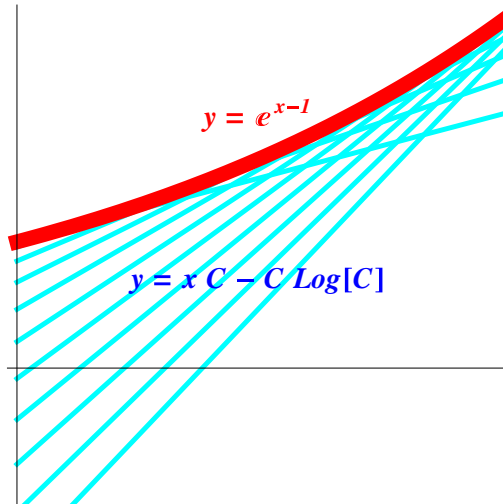
$$xC[1] - C[1] \operatorname{Log}[C[1]]$$

(* Soluția singulară *)

$$\text{Eliminate}\{y == xC[1] - C[1] \operatorname{Log}[C[1]], D[y == xC[1] - C[1] \operatorname{Log}[C[1]], C[1]]\}, C[1]$$

$$y == e^{-1+x}$$

Deci, **soluția generală** este familia de curbe $\{y = Cx - C \log C, C \in \mathbb{R}^+\}$, iar **soluția singulară**, $y = e^{x-1}$, este înfășurătoarea familiei soluției generale.



1.1.9 (*Aplicatie: Calculul unei integrale duble *)

Să calculăm integrala dublă $\iint_D \sqrt{xy} dx dy$, unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 \leq xy\}.$$

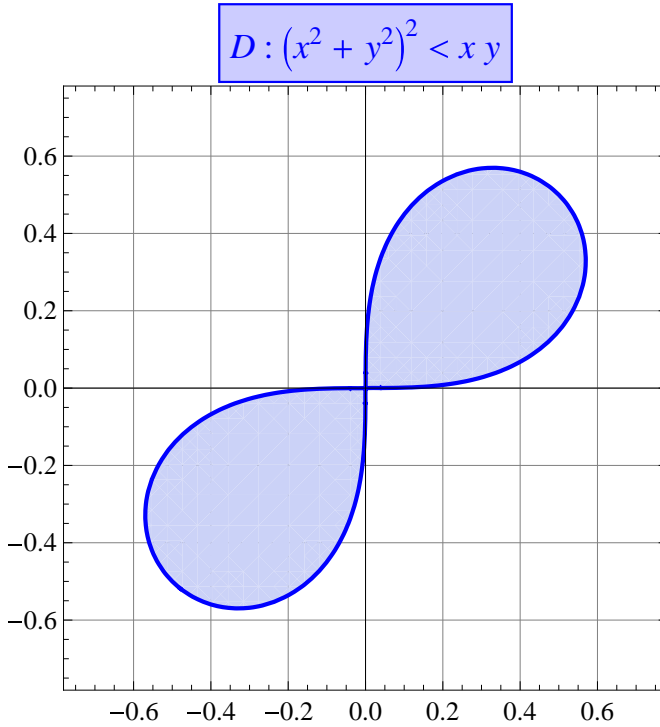
Se face trecerea la coordonate polare, $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$.

Din simetria domeniului D și a funcției se obține

$$\iint_D \sqrt{xy} dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{\frac{\sin 2\theta}{2}}} \rho^2 \sqrt{\frac{\sin 2\theta}{2}} d\rho = \frac{\pi}{24}.$$

(* Vizualizare domeniu *)

```
RegionPlot [(x^2 + y^2)^2 < xy, {x, -.7, .7}, {y, -.7, .7},
Axes -> True,
FrameStyle -> Directive[12],
BoundaryStyle -> Directive[Blue, Thickness[0.007]],
PlotLabel -> Style [Framed [D : (x^2 + y^2)^2 < xy], 24, Blue,
Background -> Lighter[Blue, 0.8]], AspectRatio -> Automatic]
```



(* Calcul integrala *)

$$2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin[2\theta]}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{\sin[2\theta]}{2}}} \rho^2 d\rho \right) d\theta$$

$$\frac{\pi}{24}$$

1.2 Serii

1.2.1 Comanda Sum

1.2.1 Sum [f[n], {n, n₀, n₁}]

Calculează suma $\sum_{n=n_0}^{n_1} f(n)$.

1.2.2 Comanda NSum

1.2.2 NSum [f[n], {n, n₀, n₁}]

Calculează numeric suma $\sum_{n=n_0}^{n_1} f(n)$.

Exemple:

$$\sum_{k=1}^n q^k$$

$$\frac{q(-1 + q^n)}{-1 + q}$$

$$\sum_{n=1}^p \text{Sin}[nx]$$

$$\text{Csc} \left[\frac{x}{2} \right] \text{Sin} \left[\frac{px}{2} \right] \text{Sin} \left[\frac{1}{2}(1 + p)x \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Sum::div : Sum does not converge.}}

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} // \text{TraditionalForm}$$

$$\zeta(3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!} // \text{TrigToExp}$$

$$-\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Cos}[nx]}{n!} // \text{TraditionalForm}$$

$$e^{\cos(x)} \cos(\sin(x))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+p)!} // \text{TraditionalForm}$$

$$\frac{1}{(p-1)\Gamma(p+1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} // \text{TraditionalForm}$$

$$\frac{\pi + 2 \log(1 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \text{Log} \left[1 + \frac{1}{n} \right] \right) // \text{TraditionalForm}$$

γ

$$\text{Do} \left[\text{Print} \left[\left[\sum_{k=1}^n k^m, k^m, " = ", \sum_{k=1}^n k^m \right], \{m, 0, 4\} \right] \right]$$

$$\sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(1+n)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(1+n)(1+2n)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(1+n)^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30}n(1+n)(1+2n)(-1+3n+3n^2)$$

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n})$$

$$\frac{1}{1 - x}$$

Product[$n, \{n, 1, p\}$]

$$p!$$

Product[$n, \{n, 1, 2p + 1, 2\}$]/TraditionalForm

$$\frac{2^{-p}(2p + 1)!}{p!}$$

Product[$n, \{n, 2, 2p, 2\}$]/TraditionalForm

$$2^p \Gamma(p + 1)$$

$$\frac{x}{\text{Sin}[x]} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) // \text{FullSimplify}$$

$$1$$

(*Wallis*)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{(2n - 1)(2n + 1)}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

1.2.3 Serii Taylor

1.2.3 Series [f[x], {x, a, n}]

Generează aproximarea de tip Taylor:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + O(x - a)^{n+1}$$

Exemple:

Series[f[x], {x, a, 3}]

$$f[a] + f'[a](x - a) + \frac{1}{2}f''[a](x - a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}[a](x - a)^3 + O[x - a]^4$$

%//Normal

$$f[a] + (-a + x)f'[a] + \frac{1}{2}(-a + x)^2f''[a] + \frac{1}{6}(-a + x)^3f^{(3)}[a]$$

Series[f[x, y], {x, a, 1}, {y, b, 1}]/Normal

$$f[a, b] + (x - a)f^{(1,0)}[a, b] + (y - b)f^{(0,1)}[a, b] + (x - a)(y - b)f^{(1,1)}[a, b]$$

Series[Sin[x], {x, 0, 5}]

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O[x]^6$$

Series[Sin[Sin[x]], {x, 0, 5}]

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + O[x]^6$$

Series[Exp[Exp[x]], {x, 0, 2}]

$$e + ex + ex^2 + O[x]^3$$

Series[Tan[Sin[x]] - Sin[Tan[x]], {x, 0, 7}]/Normal

$$\frac{x^7}{30}$$

Series[Tan[Sin[x]] - Sin[Tan[x]], {x, 0, 7}]/Normal

$$\frac{x^7}{30}$$

1.3 Limite

1.3.1 Limit [f[x], x → a]

Calculează limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

1.3.2 Limit [f[x], x → a, Direction → 1]

Calculează limita $\lim_{x \nearrow a} f(x)$.

1.3.3 Limit [f[x], x → a, Direction → -1]

Calculează limita $\lim_{x \searrow a} f(x)$.

1.3. LIMITE

Exemple:

$$\text{Limit}[1/x, x \rightarrow \infty]$$

0

$$\text{Limit}[1/x, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow 1]$$

$-\infty$

$$\text{Limit}[1/x, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow -1]$$

∞

$$\text{Limit} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x, x \rightarrow \infty \right]$$

e

$$\text{Limit} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{Tan}[x]^2}, x \rightarrow 0 \right]$$

$\frac{2}{3}$

$$\text{Limit} \left[\frac{\text{Tan}[\text{Sin}[x]] - \text{Sin}[\text{Tan}[x]]}{x^7}, x \rightarrow 0, \text{Direction} \rightarrow -1 \right]$$

$\frac{1}{30}$

$$\text{Limit} \left[\frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} - \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{144n^2} - \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{6n}, n \rightarrow \infty \right]$$

$$\sqrt{2\pi}$$

$$\text{Limit} \left[n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{na} - \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n \right), n \rightarrow \infty \right]$$

$$\frac{1}{2}(a-1)ae^a$$

2.1 Comanda Integrate

2.1.1 Integrate[$f[x_1, \dots, x_n], \{x_1, a_1, b_1\}, \dots, \{x_n, a_n, b_n\}$]

calculează integrala

$$\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Modul de utilizare al comenzii `Derivative` este explicat de următoarele tabele generate cu MATHEMATICA.

```
Grid[{"InputForm", InputForm[Integrate[f[x], x]],
{"StandardForm", StandardForm[Integrate[f[x], x]],
{"TraditionalForm", TraditionalForm[Integrate[f[x], x]]}],
Frame → All]
```

InputForm	$\text{Integrate}[f[x], x]$
StandardForm	$\int f[x] dx$
TraditionalForm	$\int f(x) dx$

```
Grid[{"InputForm", "Integrate[f[x], {x,a,b}]"},
{"StandardForm", StandardForm[Integrate[f[x], {x, a, b}]]},
{"TraditionalForm", TraditionalForm[Integrate[f[x], {x, a, b}]]}],
Frame → All]
```

InputForm	$\text{Integrate}[f[x], \{x,a,b\}]$
StandardForm	$\int_a^b f[x] dx$
TraditionalForm	$\int_a^b f(x) dx$


```
Grid[{"InputForm", "Integrate[f[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]",
{"StandardForm",
StandardForm[Integrate[f[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]],
{"TraditionalForm",
TraditionalForm[Integrate[f[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]]}],
Frame → All]
```

InputForm	<code>Integrate[f[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]</code>
StandardForm	$\int_a^b \int_c^d f[x,y] dy dx$
TraditionalForm	$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$

Exemple:

$$\int x^n dx \quad \frac{x^{1+n}}{1+n}$$

$$\int \text{Sin}[x] dx \quad -\text{Cos}[x]$$

$$\int \text{Log}[x] dx \quad -x + x \text{Log}[x]$$

$$\int \text{ArcTan}[x] dx \quad x \text{ArcTan}[x] - \frac{1}{2} \text{Log}[1+x^2]$$

$$\int \text{ArcSin}[x] dx \quad \sqrt{1-x^2} + x \text{ArcSin}[x]$$

$$\int \text{Tan}[x]^{-10} dx$$

$$-x - \frac{563 \text{Cot}[x]}{315} + \frac{506}{315} \text{Cot}[x] \text{Csc}[x]^2 - \frac{136}{105} \text{Cot}[x] \text{Csc}[x]^4$$

$$+ \frac{37}{63} \text{Cot}[x] \text{Csc}[x]^6 - \frac{1}{9} \text{Cot}[x] \text{Csc}[x]^8$$

Do [Print [" ∫ ", "dx", " = ", ∫ $\frac{1}{1+x^n} dx$], {n, 1, 4}] //

FullSimplify

$$\int \frac{dx}{1+x} = \text{Log}[1+x]$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{ArcTan}[x]$$

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\text{Log}[1+x] - \frac{1}{6}\text{Log}[1-x+x^2]$$

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(-2\text{ArcTan}[1-\sqrt{2}x] + 2\text{ArcTan}[1+\sqrt{2}x] - \text{Log}[1-\sqrt{2}x+x^2] + \text{Log}[1+\sqrt{2}x+x^2] \right)$$

Do [Print [" ∫ ", "Sin[x]^n", " dx", " = ", ∫ $\text{Sin}[x]^n dx$], {n, 1, 4}] //

FullSimplify

$$\int \text{Sin}[x] dx = -\text{Cos}[x]$$

$$\int \text{Sin}[x]^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\text{Sin}[2x]$$

$$\int \text{Sin}[x]^3 dx = -\frac{3\text{Cos}[x]}{4} + \frac{1}{12}\text{Cos}[3x]$$

$$\int \text{Sin}[x]^4 dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\text{Sin}[2x] + \frac{1}{32}\text{Sin}[4x]$$

2.1. COMANDA INTEGRATE

Exemple:

$$\int e^{x^2} dx$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erfi}[x]$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin}[x]}{x} dx$$

$$\operatorname{SinIntegral}[x]$$

$$\int \frac{\operatorname{Log}[1-x]}{x} dx$$

$$-\operatorname{PolyLog}[2, x]$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

$$\frac{\operatorname{ArcTan}\left[\frac{x}{a}\right]}{a}$$

$$\operatorname{FullSimplify}\left[\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, a > 0\right] // \operatorname{TraditionalForm}$$

$$\Gamma(a)$$

$$\operatorname{FullSimplify}\left[\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx == \operatorname{Beta}[a, b], a > 0 \& \& b > 0\right]$$

True

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, a > 0 \& \& b > 0 \right] // \text{TraditionalForm}$$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\text{FullSimplify} \left[\text{Beta}[a, b] == \frac{\text{Gamma}[a]\text{Gamma}[b]}{\text{Gamma}[a+b]}, a > 0 \& \& b > 0 \right]$$

True

$$\int_0^1 \frac{\text{Log}[1+x]}{x} dx$$

$$\frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^1 \frac{\text{Log}[1-x]}{x} dx$$

$$-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^1 \frac{\text{Log}[1+x^a]}{x} dx, a > 0 \right]$$

$$\frac{\pi^2}{12a}$$

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^\infty e^{-sx} \frac{\text{Sin}[x]}{x} dx, s > 0 \right]$$

ArcCot[s]

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^{\infty} e^{-sx} \frac{\text{Sin}[x]^2}{x} dx, s > 0 \right]$$

$$\frac{1}{4} \text{Log} \left[1 + \frac{4}{s^2} \right]$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{Sin}[x]}{x} dx$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\text{Log}[x]} dx, a > 0 \&\& b > 0 \right]$$

$$\text{Log} \left[\frac{1+a}{1+b} \right]$$

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^{\pi/2} \text{Sin}[x]^{2a} dx, a > 0 \right]$$

$$\frac{\sqrt{\pi} \text{Gamma} \left[\frac{1}{2} + a \right]}{2 \text{Gamma}[1+a]}$$

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^{\infty} \frac{\text{ArcTan}[ax]}{x(1+x^2)} dx, a > 0 \right]$$

$$\frac{1}{2} \pi \text{Log}[1+a]$$

$$\text{FullSimplify} \left[\int_0^{\infty} e^{-sx} \text{Log}[x] dx, s > 0 \right]$$

$$-\frac{-1 + \text{EulerGamma} + \text{Log}[s]}{s^2}$$

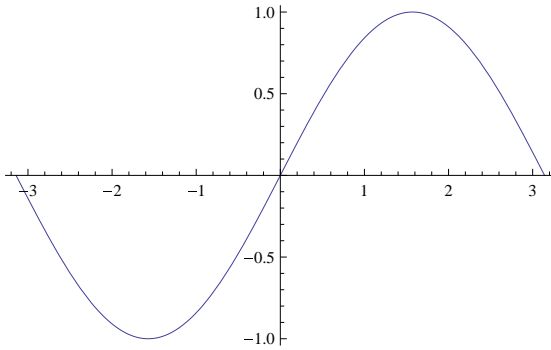
3.1 Comanda Plot

Comanda Plot are sintaxa

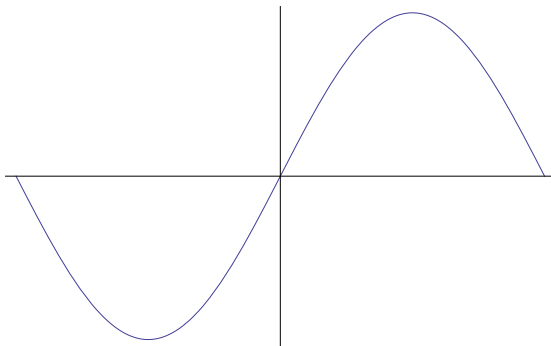
3.1.1 `Plot[f(x), {x, a, b}]`

Vizualizează graficul al funcției $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1.2 (* Exemplu Plot *)

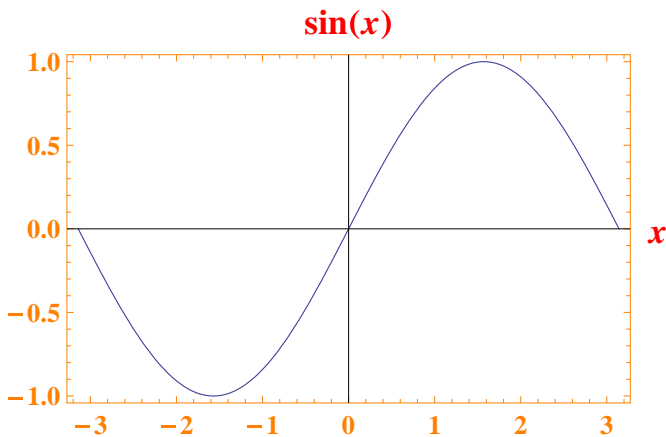
 $\text{Plot}[\text{Sin}[x], \{x, -\pi, \pi\}]$ 

3.1.3 (* Exemplu Plot *)

 $\text{Plot}[\text{Sin}[x], \{x, -\pi, \pi\}, \text{Ticks} \rightarrow \text{None}]$ 

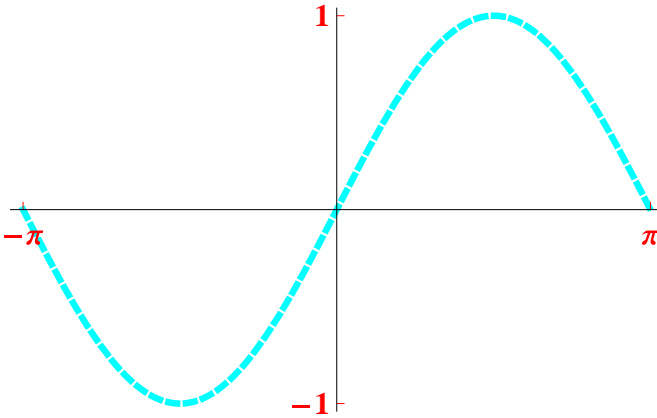
3.1.4 (* Exemplu Plot *)

```
Plot[Sin[x], {x, -π, π},  
Axes → True, AxesLabel → {x, Sin[x]},  
LabelStyle → Directive[Red, Bold, 16],  
Frame → True, FrameStyle → Directive[Orange, 12]]
```



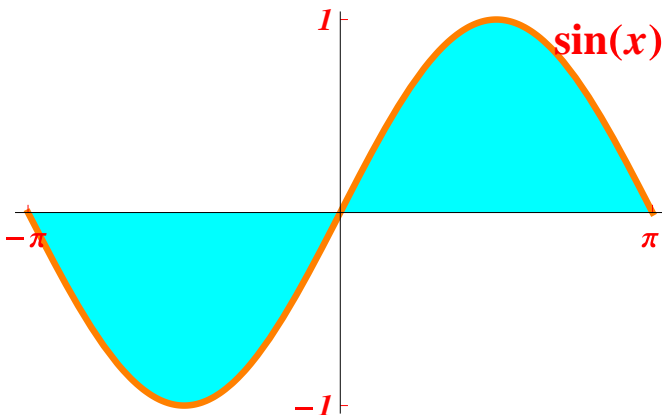
3.1.5 (* Exemplu Plot *)

```
Plot[Sin[x], {x, - $\pi$ ,  $\pi$ }, Ticks  $\rightarrow$  {{-Pi, Pi}, {-1, 1}},  
TicksStyle  $\rightarrow$  Directive[Red, Bold, 14],  
PlotStyle  $\rightarrow$  {Cyan, Dashed, Thickness[0.01]}
```



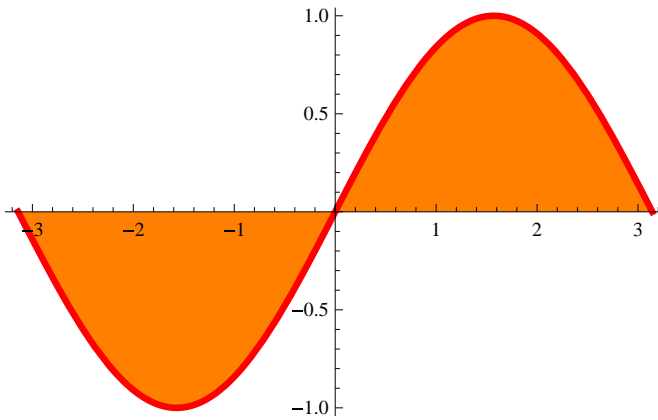
3.1.6 (* Exemplu Plot *)

```
grafic0 = Plot[Sin[x], {x, - $\pi$ ,  $\pi$ }, Ticks  $\rightarrow$  {{-Pi, Pi}, {-1, 1}},  
TicksStyle  $\rightarrow$  Directive[Red, Bold, Italic, 14],  
PlotStyle  $\rightarrow$  {Orange, Thickness[0.01]},  
Filling  $\rightarrow$  Axis, FillingStyle  $\rightarrow$  Cyan];  
text0 = Graphics[Text[Style[Sin[x], 20, Bold, Red], {2.7, 0.9}],  
FormatType  $\rightarrow$  TraditionalForm];  
Show[grafic0, text0]
```



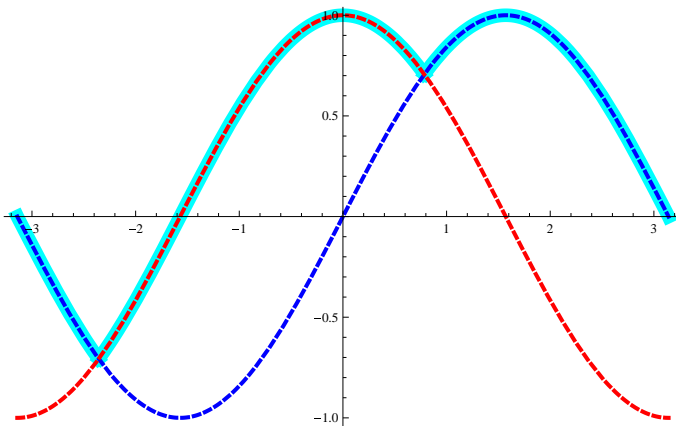
3.1.7 (* Exemplu Plot *)

```
Plot[Sin[x], {x, -π, π},  
Filling → Axis, FillingStyle → Orange,  
PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]]
```



3.1.8 (* Exemplu Plot *)

```
Plot[{Max[Sin[x], Cos[x]], Sin[x], Cos[x]}, {x, - $\pi$ ,  $\pi$ },  
PlotStyle  $\rightarrow$  {{Cyan, Thickness[0.02]}, {Blue, Dashed, Thickness[0.006]},  
{Red, Dashed, Thickness[0.006]}}
```



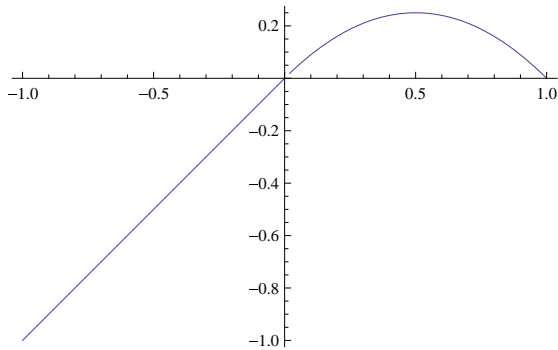
3.1.9 (* Exemplu Plot, Piecewise *)

```
f[x_]:=Piecewise[{{x,x < 0}, {x(1-x),x > 0}}];
```

$f[x]$

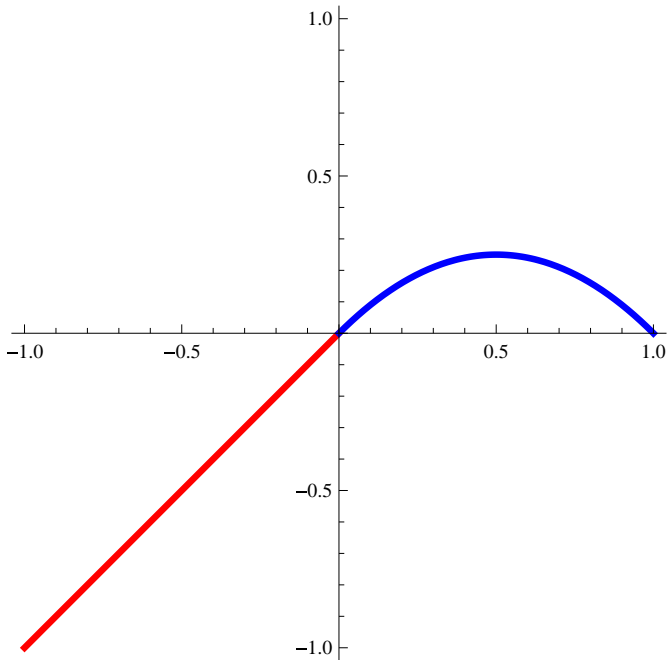
$$\begin{cases} x & x < 0 \\ (1-x)x & x > 0 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
Plot[f[x], {x, -1, 1}, AspectRatio → Automatic]
```



3.1.10 (* Exemplu Plot *)

```
grafic1 = Plot[f[x], {x, -1, 0}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]};  
grafic2 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]};  
Show[grafic1, grafic2, PlotRange → {{-1, 1}, {-1, 1}},  
AspectRatio → Automatic]
```



3.2 Comanda ParametricPlot

Comanda `ParametricPlot` are sintaxa

3.2.1 `ParametricPlot[{x(t), y(t)}, {t, a, b}]`

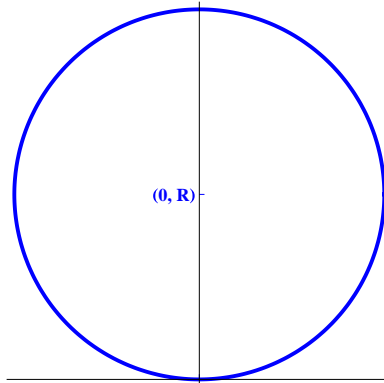
Genereaza un grafic al curbei

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

3.2.2 (* Exemplu `ParametricPlot` *)

```
cerc[x_, y_, R_]:=ParametricPlot[{x + RCos[t], y + RSin[t]}, {t, 0, 2π},
PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]},
Ticks → {{{0, "0"}}, {{R, "(0, R)"}}},
TicksStyle → Directive[Bold, Blue, 14]]
```

```
cerc[0, 1, 1]
```



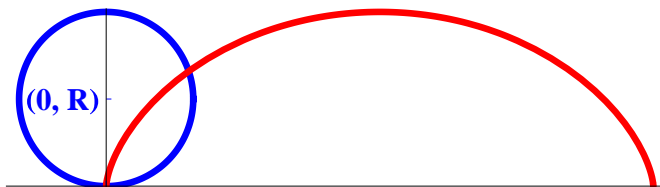
3.2.3 (* Cicloida *)

```
cicloida[R_]:=ParametricPlot[{R(t - Sin[t]), R(1 - Cos[t])}, {t, 0, 2π},  
PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]},  
Ticks → {{{2π, "2π R"}}, {{2, "2 R"}}},  
TicksStyle → Directive[Bold, Blue, 14]]  
cicloida[1]
```



3.2.4 (* Cerc și Cicloida generată *)

```
Show[cerc[0,1,1], cicloida[1], PlotRange → Automatic]
```



3.2.5 (* Epicicloida, $R=k r$ *)

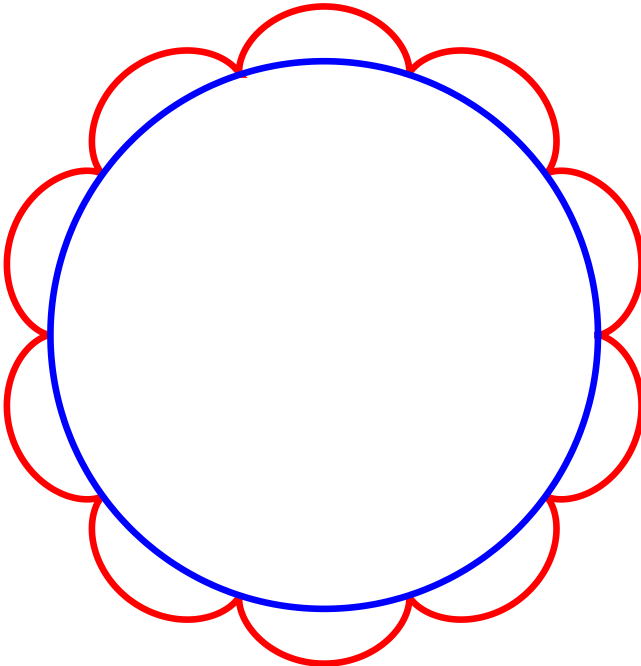
```
epicicloida[r_, k_] :=
```

```
ParametricPlot [ { r(k + 1) ( Cos[t] -  $\frac{\text{Cos}[(k + 1)t]}{k + 1}$  ),
```

```
r(k + 1) ( Sin[t] -  $\frac{\text{Sin}[(k + 1)t]}{k + 1}$  ) } , {t, 0, 2\pi},
```

```
PlotStyle -> {Red, Thickness[0.01]}, Ticks -> None]
```

```
Show[epicicloida[1, 10], cerc[0, 0, 10], Axes->False]
```

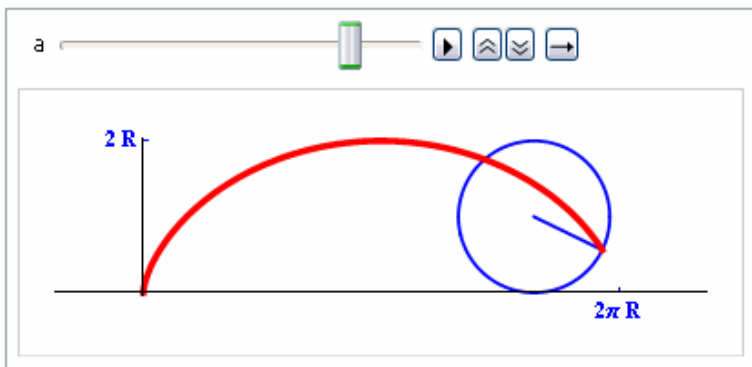


3.2.6 (* Animatie: Generarea cicloidei *)

```

R = 1;
Animate[
ParametricPlot[
{
{2π Ra, R}  $\frac{t}{2\pi} + \frac{(2\pi-t)}{2\pi} \{R(a2\pi - \text{Sin}[a2\pi]), R(1 - \text{Cos}[a2\pi])\}$ ,
{2π Ra + R Cos[t], R + R Sin[t]},
{R(at - Sin[at]), R(1 - Cos[at])}, {-R, 0}, {2π + R, 2}}, {t, 0, 2π},
PlotStyle → {{Blue, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]},
{Red, Thickness[0.01]}}, Ticks → {{{2π, "2π R"}}, {{2, "2 R"}}},
TicksStyle → Directive[Bold, Blue, 12]], {a, 0, 1},
AnimationRunning → False]

```



3.2.7 (* Secvențe din generarea cicloidei *)

$R = 1;$

Table[

ParametricPlot[

$\left\{ \left\{ 2\pi Ra, R \right\} \frac{t}{2\pi} + \frac{(2\pi-t)}{2\pi} \left\{ R(a2\pi - \text{Sin}[a2\pi]), R(1 - \text{Cos}[a2\pi]) \right\},$

$\left\{ 2\pi Ra + R\text{Cos}[t], R + R\text{Sin}[t] \right\},$

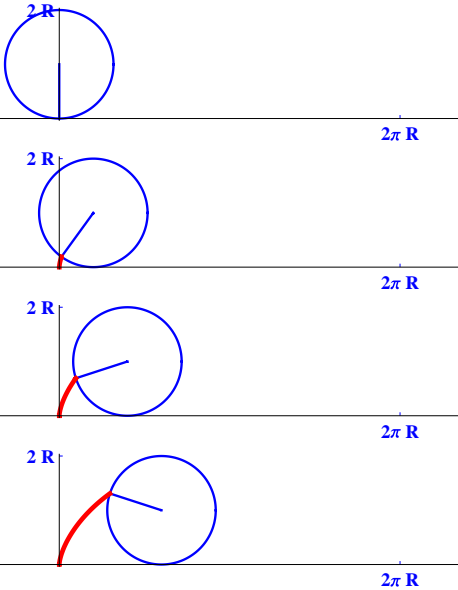
$\left\{ R(at - \text{Sin}[at]), R(1 - \text{Cos}[at]) \right\}, \{-R, 0\}, \{2\pi + R, 2\},$

$\{t, 0, 2\pi\},$

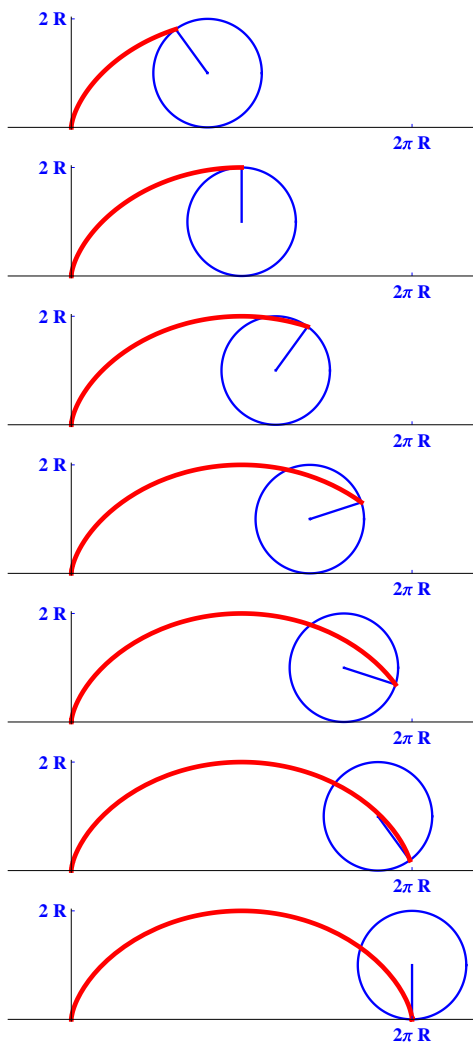
PlotStyle $\rightarrow \left\{ \left\{ \text{Blue}, \text{Thickness}[0.005] \right\}, \left\{ \text{Blue}, \text{Thickness}[0.005] \right\},$

$\left\{ \text{Red}, \text{Thickness}[0.01] \right\} \right\}, \text{Ticks} \rightarrow \left\{ \left\{ \left\{ 2\pi, "2\pi R" \right\} \right\}, \left\{ \left\{ 2, "2 R" \right\} \right\} \right\},$

TicksStyle $\rightarrow \text{Directive}[\text{Bold}, \text{Blue}, 12], \{a, 0, 1, .1\}$



3.2. COMANDA PARAMETRICPLOT

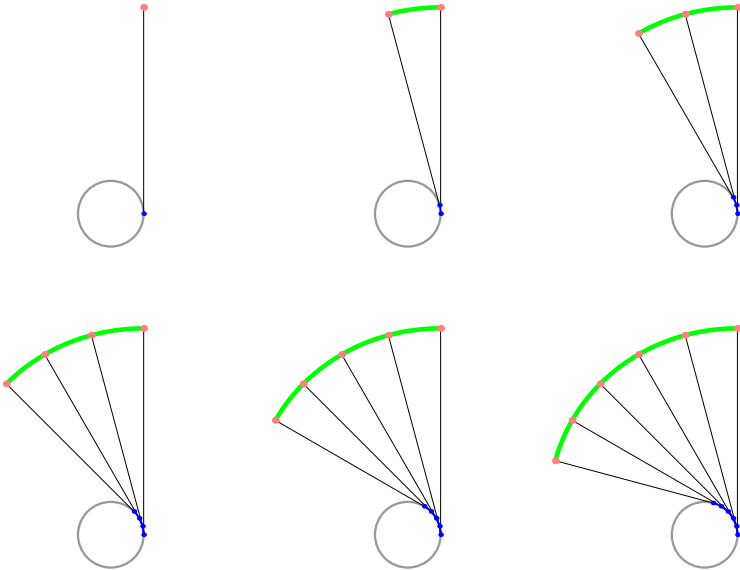


3.2.8 (* Secvențe din generarea evolventei cercului *)

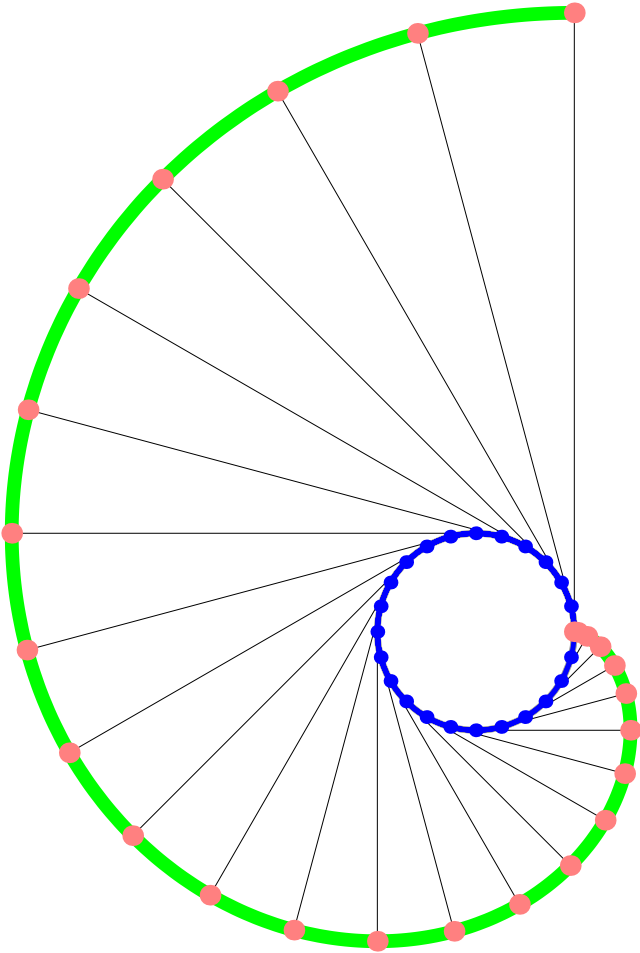
evolventa[t_]:=

{Cos[t] - Sin[t] (2 Pi - t), Sin[t] + Cos[t] (2 Pi - t)}

$t \in [0, 2\pi]$.



3.2. COMANDA PARAMETRICPLOT



3.2.9 (* Lemniscata lui Bernoulli *)

$a:=1;$

`ParametricPlot` $\left[\left\{ a \frac{\text{Cos}[t]}{1 + \text{Sin}[t]^2}, a \frac{\text{Sin}[t] \text{Cos}[t]}{1 + \text{Sin}[t]^2} \right\}, \{t, -\pi, \pi\}, \right.$

`Axes` \rightarrow `None`, `Frame` \rightarrow `True`,

`FrameLabel` \rightarrow $\{\{ " ", " " \}, \{ " ", \text{"Lemniscata lui Bernoulli"} \},$

`LabelStyle` \rightarrow `Directive`[`Blue`, `Bold`, 16],

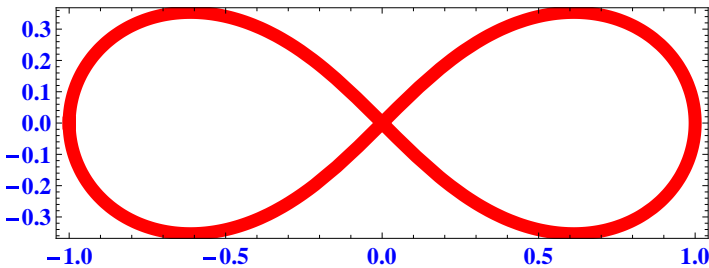
`PlotLabel` \rightarrow `Style` $\left[\text{Framed} \left[\left(a \frac{\text{Cos}[t]}{1 + \text{Sin}[t]^2}, a \frac{\text{Sin}[t] \text{Cos}[t]}{1 + \text{Sin}[t]^2} \right) \right], \right.$

20, `Blue`, `Background` \rightarrow `Lighter`[`Yellow`]],

`PlotStyle` \rightarrow $\{\text{Red}, \text{Thickness}[0.02]\}$

$$\left(a \frac{\text{Cos}[t]}{1 + \text{Sin}[t]^2}, a \frac{\text{Sin}[t] \text{Cos}[t]}{1 + \text{Sin}[t]^2} \right)$$

Lemniscata lui Bernoulli

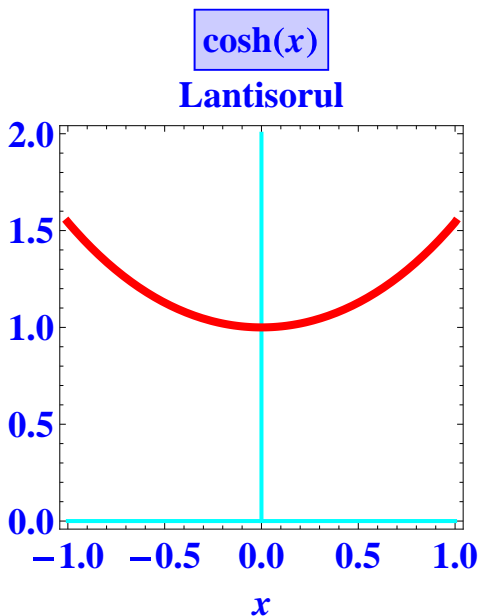


3.2.10 (* Lantisorul *)

```

a:=1;
ParametricPlot [{{x, 0}, {0,  $\frac{1+x}{1}$ }, {ax, a Cosh [ $\frac{x}{a}$ ]}}, {x, -1, 1},
PlotStyle → {{Cyan, Thickness[0.01]},
{Cyan, Thickness[0.01]},
{Red, Thickness[0.02]}},
Axes → None, Frame → True,
FrameLabel → {{ " ", " " }, {x, "Lantisorul"}},
LabelStyle → Directive[Blue, Bold, 20],
PlotLabel → Style [Framed [a Cosh [ $\frac{x}{a}$ ]], 20, Blue,
Background → Lighter[White]]]

```



3.2.11 (* Spirala logaritmică *)

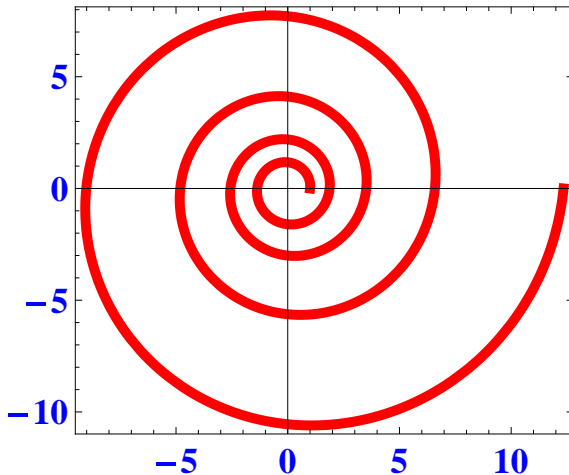
```

a:=1;
b:=.1;
ParametricPlot [{a e^{bt} Cos[t], a e^{bt} Sin[t]}, {t, 0, 8π},
Axes → True, Frame → True,
FrameLabel → {" ", " "}, {" ", "Spirala logaritmică"}},
LabelStyle → Directive[Blue, Bold, 16],
PlotLabel → Style[Framed["(a e^{bt} Cos[t], a e^{bt} Sin[t])"], 20,
Blue, Background → Lighter[Yellow]],
PlotStyle → {Red, Thickness[0.02]}]

```

($a e^{bt} \cos[t], a e^{bt} \sin[t]$)

Spirala logaritmică



3.2.12 (* Tractricea *)

$a:=1;$

`ParametricPlot` [$\{a \text{Sin}[t], a \text{Cos}[t] + a \text{Log}[\text{Tan}[\frac{t}{2}]]\}, \{t, 0, \pi\}$,

`Axes` \rightarrow `True`, `Frame` \rightarrow `True`,

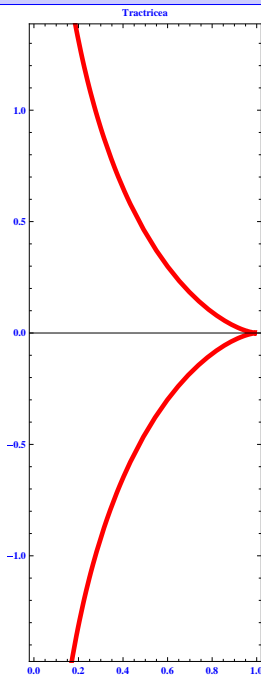
`FrameLabel` \rightarrow $\{\{ " ", " " \}, \{ " ", "Tractricea" \}\}$,

`LabelStyle` \rightarrow `Directive`[`Blue`, `Bold`, `10`],

`PlotLabel` \rightarrow `Style` [`Framed` [$"(a \text{Sin}[t], a \text{Cos}[t] + a \text{Log}[\text{Tan}[\frac{t}{2}]])"$],
20, `Blue`, `Background` \rightarrow `Lighter`[`Yellow`]],

`PlotStyle` \rightarrow $\{\text{Red}, \text{Thickness}[0.02]\}$

$(a \text{Sin}[t], a \text{Cos}[t] + a \text{Log}[\text{Tan}[\frac{t}{2}]])$



3.2.13 (* Cissoida lui Diocles *)

$a:=1;$

ParametricPlot $\left[\left\{ 2a \frac{t^2}{1+t^2}, 2a \frac{t^3}{1+t^2} \right\}, \{t, -1.2, 1.2\}, \right.$

Axes \rightarrow True, Frame \rightarrow True,

FrameLabel \rightarrow $\{\{ " ", " " \}, \{ " ", "Cissoida lui Diocles" \}\},$

LabelStyle \rightarrow Directive[Blue, Bold, 10],

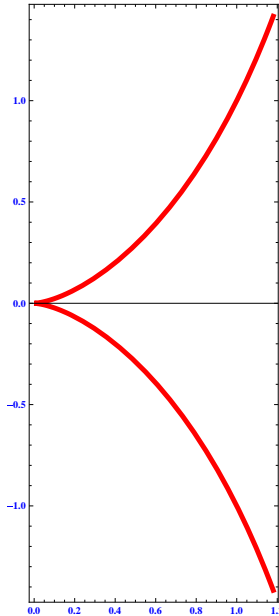
PlotLabel \rightarrow Style $\left[\text{Framed} \left["(2a \frac{t^2}{1+t^2}, 2a \frac{t^3}{1+t^2})" \right], 20, \text{Blue}, \right.$

Background \rightarrow Lighter[Yellow],

PlotStyle \rightarrow {Red, Thickness[0.02]}

$$\left(2a \frac{t^2}{1+t^2}, 2a \frac{t^3}{1+t^2} \right)$$

Cissoida lui Diocles



3.3 Comanda ContourPlot

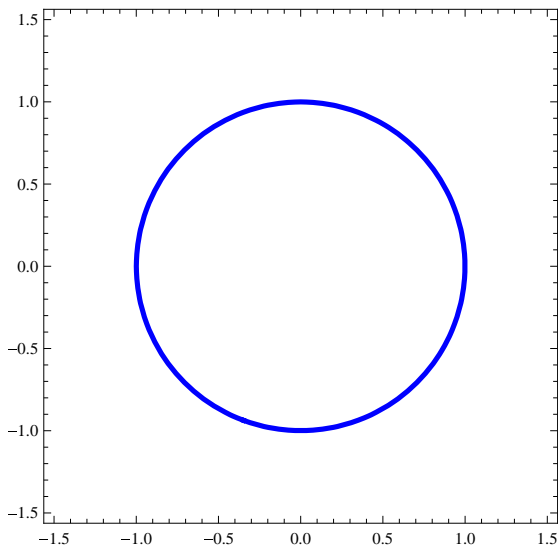
Comanda ContourPlot are sintaxa

3.3.1 `ContourPlot[f(x, y) == 0, {x, a, b}, {y, c, d}]`

Vizualizează graficului curbei reprezentată implicit de ecuația $f(x, y) == 0$ din interiorul dreptunghiului $[a, b] \times [c, d]$.

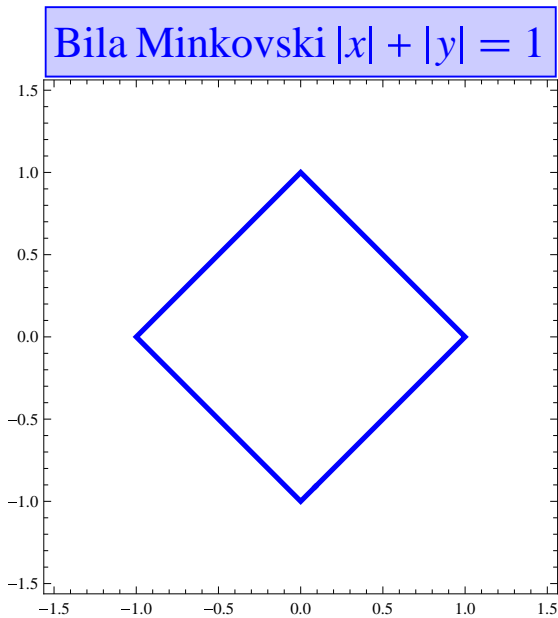
3.3.2 (* Frontiera bilei euclidiene *)

`ContourPlot[x2 + y2 == 1, {x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5},
ContourStyle → Directive[Blue, Thickness[0.01]]]`



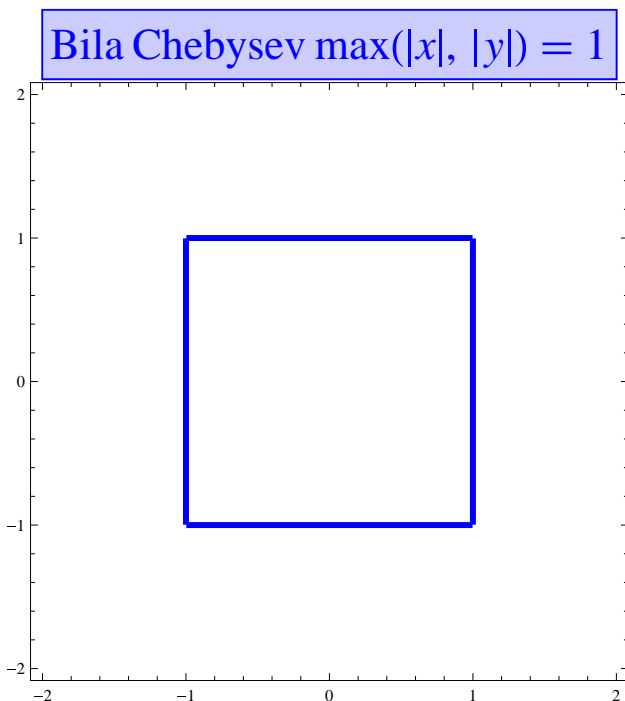
3.3.3 (* Frontiera bilei Minkovski *)

```
ContourPlot[Abs[x]+Abs[y]==1,{x,-1.5,1.5},{y,-1.5,1.5},  
ContourStyle → Directive[Blue,Thickness[0.01]],  
PlotLabel → Style[Framed[Bila Minkovski Abs[x]+Abs[y]==1],  
24,Blue,Background → Lighter[Blue, 0.8]]]
```



3.3.4 (* Frontiera bilei Chebysev *)

```
ContourPlot[
Max[Abs[x], Abs[y]] == 1,
{x, -2, 2}, {y, -2, 2},
ContourStyle → Directive[Blue, Thickness[0.01]],
PlotLabel → Style[Framed[BilaChebysev Max[Abs[x], Abs[y]] == 1],
24, Blue, Background → Lighter[Blue, 0.8]]]
```

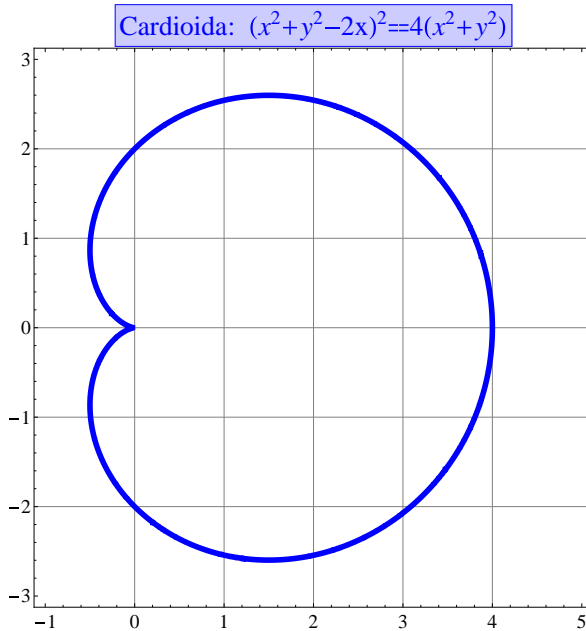


3.3.5 (* Cardioida *)

```

ContourPlot [(x^2 + y^2 - 2x)^2 == 4(x^2 + y^2),
{x, -1, 5}, {y, -3, 3},
ContourStyle -> Directive[Blue, Thickness[0.01]],
PlotLabel -> Style[Framed["Cardioida: (x^2 + y^2 - 2x)^2 == 4(x^2 + y^2)"],
28, Blue, Background -> Lighter[Blue, 0.8]],
FrameStyle -> Directive[Black, 20], GridLines -> Automatic]

```

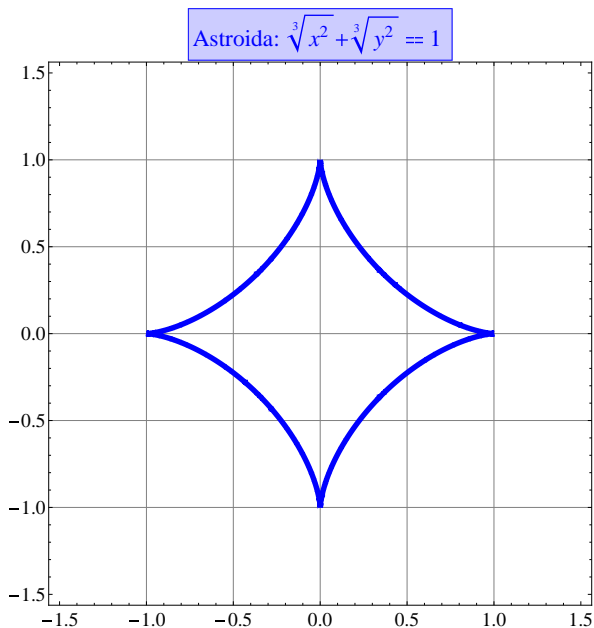


3.3.6 (* Astroida*)

```

ContourPlot[
 $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} == 1$ ,
{x, -1.5, 1.5}, {y, -1.5, 1.5},
ContourStyle → Directive[Blue, Thickness[0.01]],
PlotLabel → Style[
Framed["Astroida:  $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} == 1$ "], 24, Blue,
Background → Lighter[Blue, 0.8]],
FrameStyle → Directive[Black, 20], GridLines → Automatic,
AspectRatio → Automatic, PlotPoints → 300, ImageSize → 600]

```



3.3.7 (* Curba Scarabeu *)

$c = 3.2; a = 9;$

ContourPlot[

$$4(x^2 + y^2 + cx)^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2)^2 == 0,$$

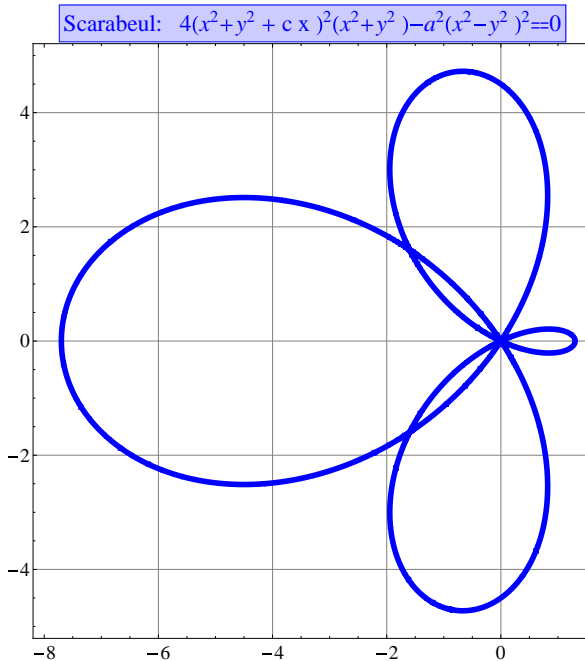
{x, -8, 1.4}, {y, -5, 5},

ContourStyle → Directive[Blue, Thickness[0.01]],

PlotLabel → Style[

Framed [Scarabeu : $4(x^2 + y^2 + cx)^2(x^2 + y^2) - a^2(x^2 - y^2)^2 == 0$],

24, Blue, Background → Lighter[Blue, 0.8]], GridLines → Automatic

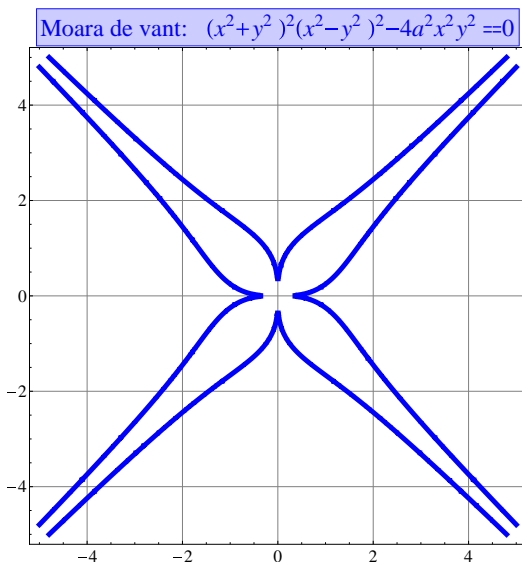


3.3.8 (* Curba morii de vânt *)

```

a = 2;
ContourPlot[
(x2 + y2)2 (x2 - y2)2 - 4a2x2y2 == 0,
{x, -5, 5}, {y, -5, 5},
ContourStyle → Directive[Blue, Thickness[0.01]],
PlotLabel → Style[
Framed["Moara de vant: (x2 + y2)2 (x2 - y2)2 - 4a2x2y2 == 0"], 28,
Blue, Background → Lighter[Blue, 0.8]], GridLines → Automatic

```

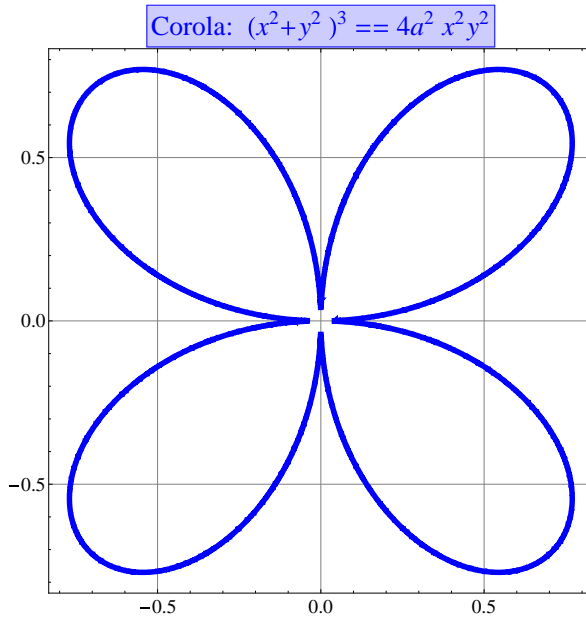


3.3.9 (* Curba corola *)

```

a = 1;
ContourPlot[
(x2 + y2)3 == 4a2x2y2,
{x, -.8, .8}, {y, -.8, .8},
ContourStyle → Directive[Blue, Thickness[0.01]],
PlotLabel → Style[
Framed["Corola: (x2 + y2)3 == 4a2x2y2"], 28, Blue,
Background → Lighter[Blue, 0.8]], GridLines → Automatic]

```



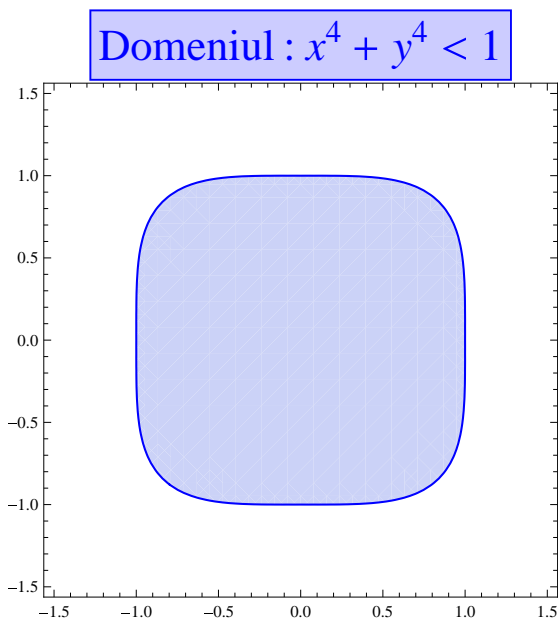
3.4 Comanda RegionPlot

3.4.1 RegionPlot[pred, {x,a,b},{y,c,d}]

vizualizează subdomeniul plan din dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$ pentru care condiția “pred” este adevărată.

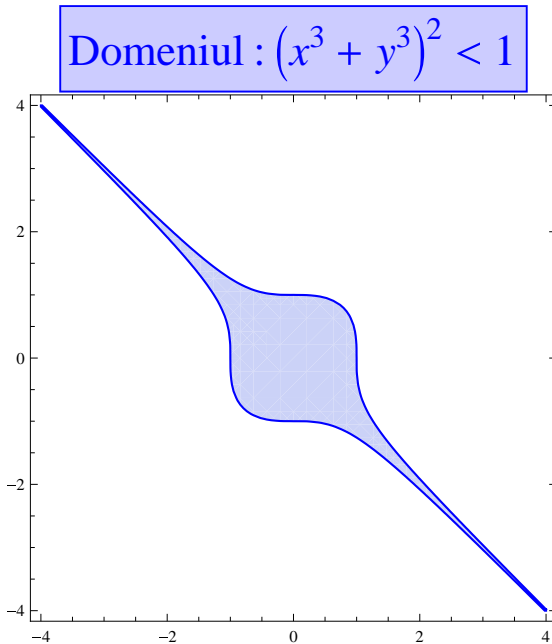
3.4.2 (* Exemplu RegionPlot *)

```
RegionPlot [ $x^4 + y^4 < 1$ , {x,-1.5,1.5},{y,-1.5,1.5},  
BoundaryStyle  $\rightarrow$  Directive[Blue,Thickness[0.004]],  
PlotLabel  $\rightarrow$  Style [Framed [Domeniul:  $x^4 + y^4 < 1$ ],  
24, Blue, Background $\rightarrow$  Lighter[Blue, 0.8]]]
```



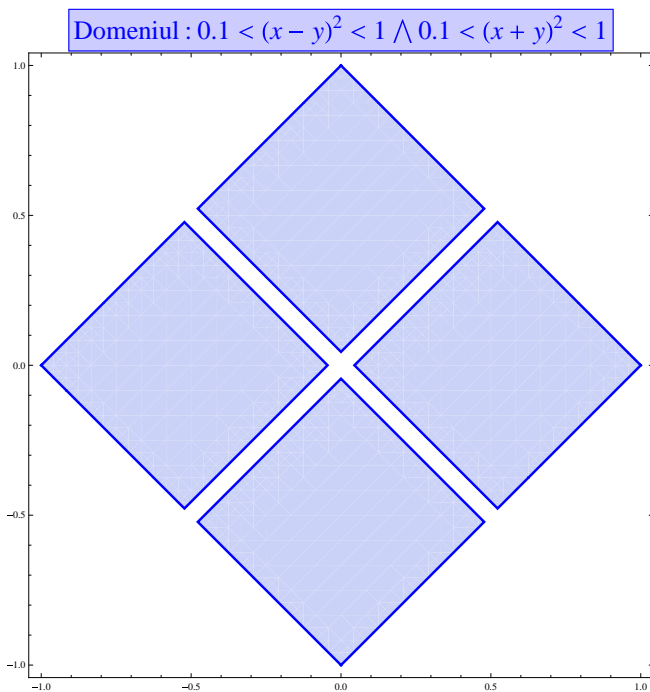
3.4.3 (* Exemplu RegionPlot *)

`RegionPlot` [$(x^3 + y^3)^2 < 1$, $\{x, -4, 4\}$, $\{y, -4, 4\}$,
`BoundaryStyle` \rightarrow `Directive`[Blue, `Thickness`[0.004]],
`PlotLabel` \rightarrow `Style` [`Framed` [`Domeniul` : $(x^3 + y^3)^2 < 1$],
 24, Blue, `Background` \rightarrow `Lighter`[Blue, 0.8]]]



3.4.4 (* Exemplu RegionPlot *)

```
RegionPlot[ $0.002 < (x - y)^2 < 1$  &&  $0.002 < (x + y)^2 < 1$ , {x, -1, 1},  
{y, -1, 1}, BoundaryStyle → Directive[Blue, Thickness[0.004]],  
PlotLabel →  
Style[Framed[Domeniul :  $0.1 < (x - y)^2 < 1$  &&  $0.1 < (x + y)^2 < 1$ ],  
24, Blue, Background → Lighter[Blue, 0.8]], PlotPoints → 25]
```



3.5 Comanda Plot3D

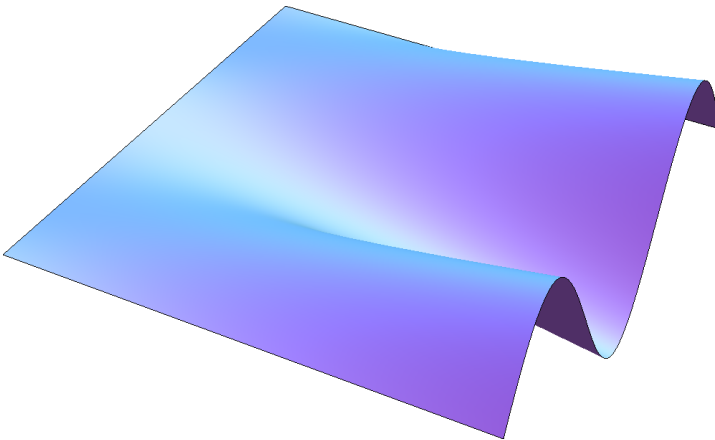
Comanda Plot3D are sintaxa

3.5.1 `Plot3D[f[x, y], {x, a, b}, {y, c, d}]`

vizualizează graficul funcției $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

3.5.2 (* Exemplu Plot3D - Conoid *)

```
Plot3D[t/2 Sin[p], {t, 0, 3Pi}, {p, 0, 3Pi},  
Boxed->False, Axes->False,  
PlotPoints->{65, 65},  
Background->GrayLevel[1.00], Mesh->False]
```



3.6 Comanda ParametricPlot3D

Comanda ParametricPlot3D are sintaxa

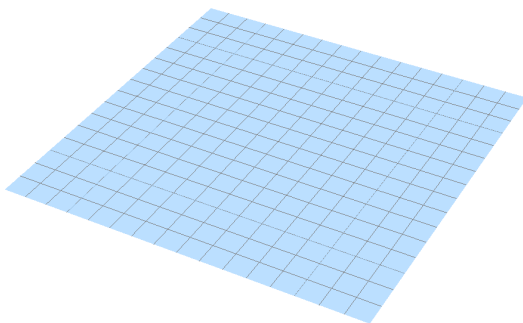
3.6.1 ParametricPlot3D[{x(u,v),y(u,v),z(u,v)},{u,a,b},{v,c,d}]

Vizualizează suprafața cu reprezentarea parametrică

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad u \in [a, b], \quad v \in [c, d].$$

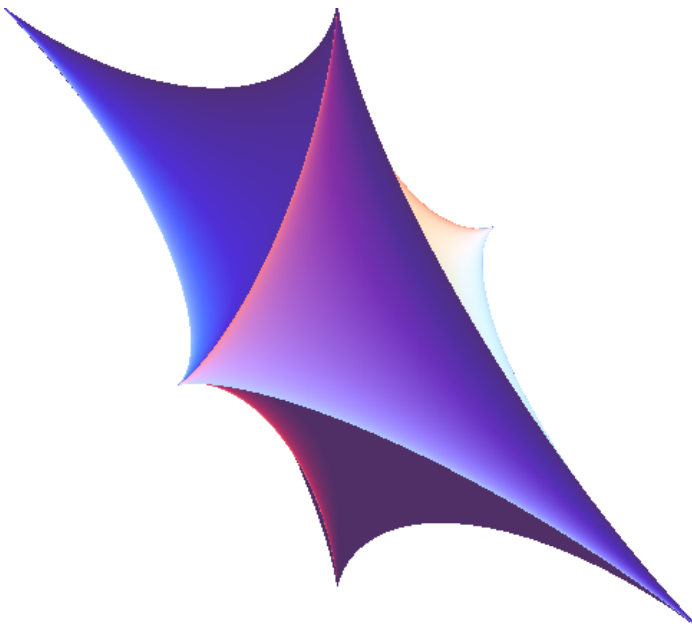
Exemplu

**ParametricPlot3D[{x, y, 0}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
Boxed → False, Axes → False, Mesh → True,
MeshStyle → Directive[Gray],
PlotStyle → Directive[{Opacity[0.75]}]]**



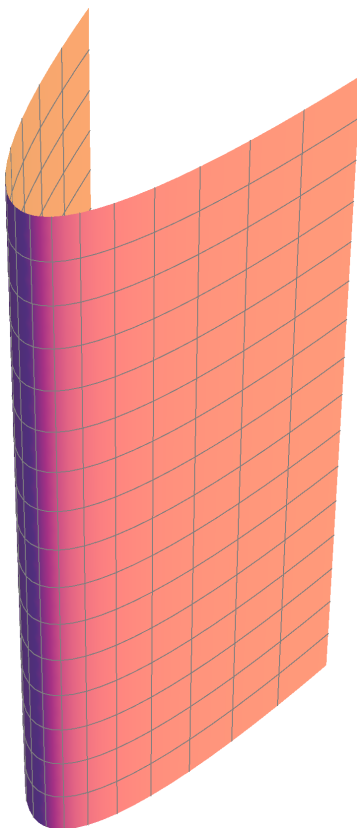
3.6.2 (* Astroid *)

```
ParametricPlot3D[{{(Cos[p]Cos[t])^3, 3(Cos[p]Sin[t])^3, 2Sin[p]^3},  
{t, -Pi, Pi}, {p, -1.45, 1.45},  
Boxed->False, Axes->False, Mesh->False,  
ViewPoint->{3, 4, 4}]
```



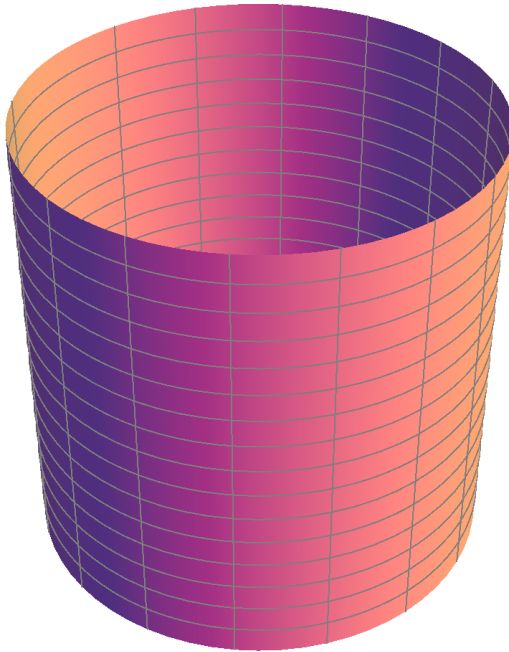
3.6.3 (* Cilindru *)

`ParametricPlot3D[{u, u^2/4, v}, {u, -10, 10}, {v, -25, 25},
Boxed → False, Axes → False, PlotPoints → {33, 33}`



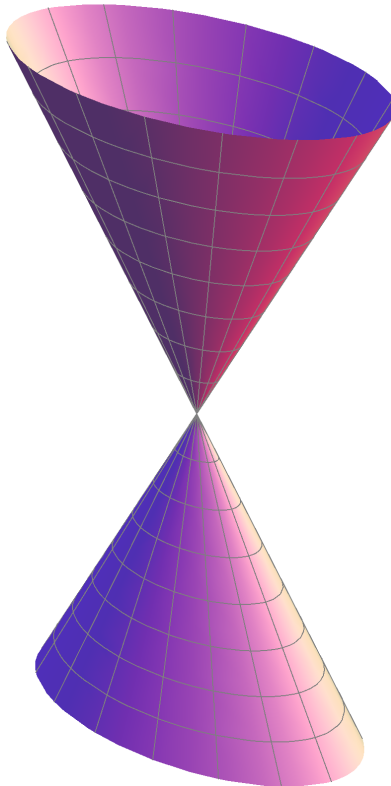
3.6.4 (* Cilindru *)

```
ParametricPlot3D[{Cos[u], Sin[u], v}, {u, -Pi, Pi}, {v, -1, 1},  
Boxed → False, Axes → False, PlotPoints → {65, 25},  
Background → GrayLevel[1.0]]
```



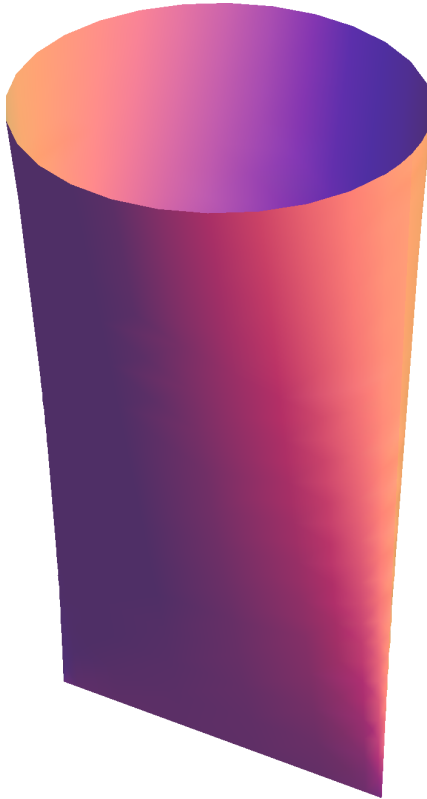
3.6.5 (* Con *)

`ParametricPlot3D` [$\{\frac{1}{2}u\cos[v], \frac{1}{4}u\sin[v], u\}$, $\{u, -3, 3\}$, $\{v, -\pi, \pi\}$,
`Boxed` \rightarrow `False`,
`Axes` \rightarrow `False`, `PlotPoints` \rightarrow $\{41, 41\}$, `Background` \rightarrow `GrayLevel`[1.0]]

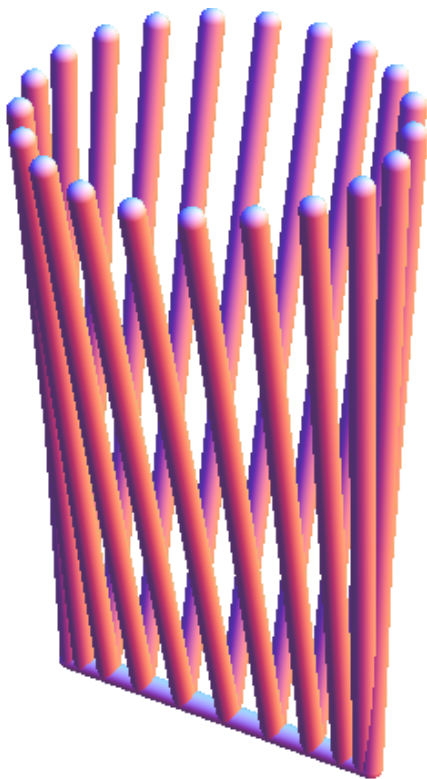


3.6.6 (* Conoid - “tub pasta” *)

```
tubpasta = ParametricPlot3D[  
{t * {Cos[φ], Sin[φ], 4} + (1 - t) * {Cos[φ], 0, 0}}, {t, 0, 1},  
{φ, 0, 2Pi}, Boxed → False, Axes → False, Mesh → False]
```

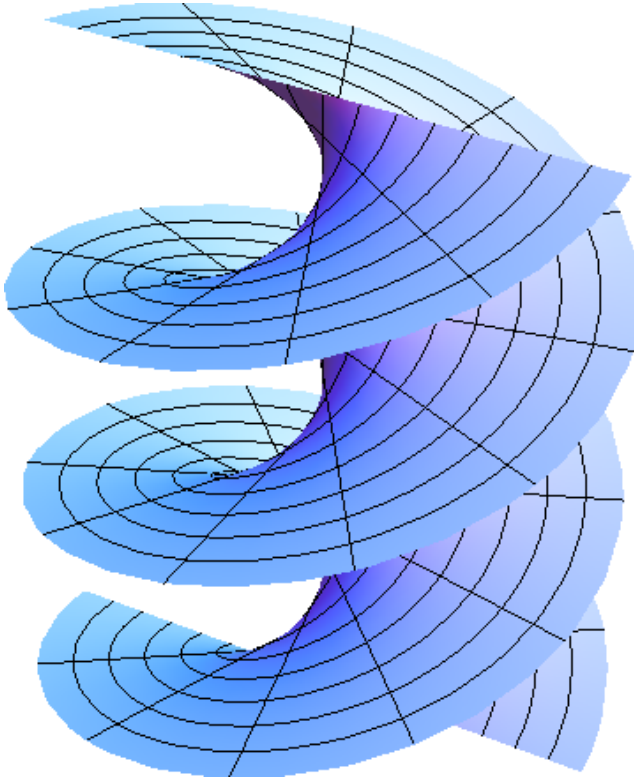


3.6.7 (* Conoid - “tub pasta” - generatoare rectilinii*)



3.6.8 (* Elicoid *)

`ParametricPlot3D[{pCos[t], pSin[t], t}, {t, -Pi, 2Pi},
{p, -4, 4}, Boxed → False, Axes → False, PlotPoints → {45, 37}]`



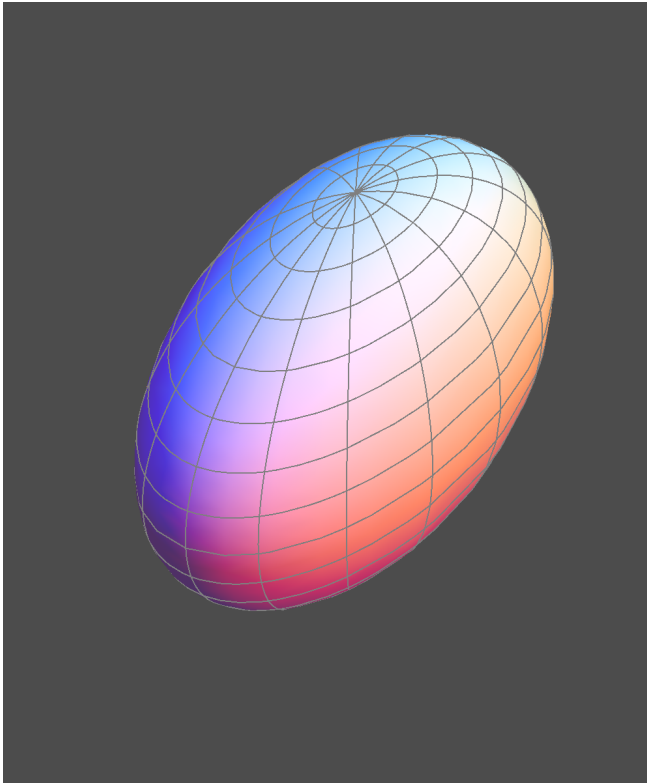
3.6.9 (* Elipsoid 1*)

```
ParametricPlot3D[{Cos[p]Cos[t], 2/3Cos[p]Sin[t], 3/2Sin[p]},  
{t, 0, 2Pi}, {p, -Pi/2, Pi/2},  
Boxed->False, Axes->False,  
Background->GrayLevel[1.0]]
```



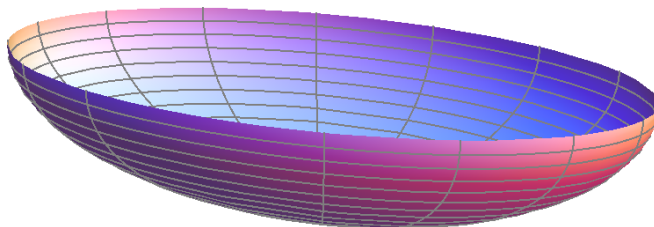
3.6.10 (* Elipsoid 2*)

```
a = ParametricPlot3D[{4Cos[p]Cos[t], 8Cos[p]Sin[t], 5Sin[p]},  
{t, -Pi, Pi}, {p, -Pi/2, Pi/2}, Boxed → False, Axes → False,  
PlotPoints → {41, 41}, Background → GrayLevel[0.3]]
```



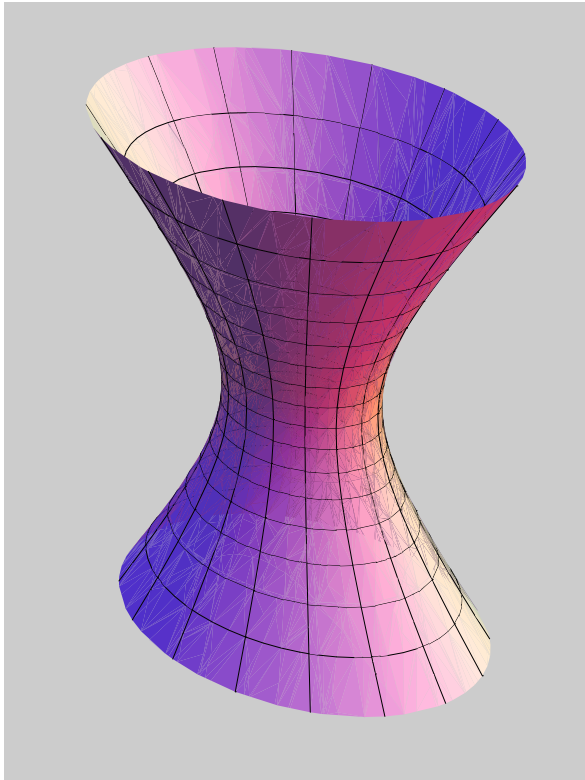
3.6.11 (* Semielipsoid *)

```
ParametricPlot3D[  
{21Cos[p]Cos[t], 35Cos[p]Sin[t], 14Sin[p]},  
{t, 0, 2Pi}, {p, -Pi/2, 0},  
Boxed->False, Axes->False,  
PlotPoints->{37, 17},  
ViewPoint->{3, 2, 1},  
Background->GrayLevel[1]]
```



3.6.12 (* Hiperboloidul cu o pânză *)

```
a = ParametricPlot3D[{Cos[t]Cosh[p], 2/3Sin[t]Cosh[p], 3/2Sinh[p]},  
{t, -Pi, Pi}, {p, -Pi/2, Pi/2}, Boxed → False,  
Axes → False, PlotPoints → {29, 9}, Background → GrayLevel[0.8]]
```



3.7 Comanda RegionPlot3D

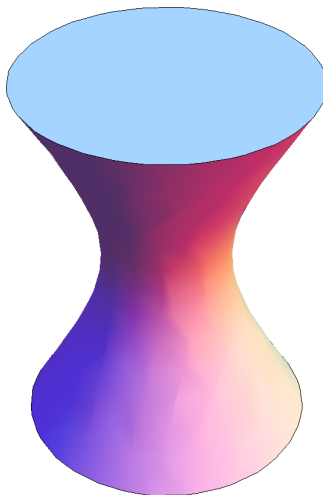
Sintaxa comenzii RegionPlot3D este

3.7.1 `RegionPlot3D[pred, {x, x1, x2}, {y, y1, y2}, {z, z1, z2}]`

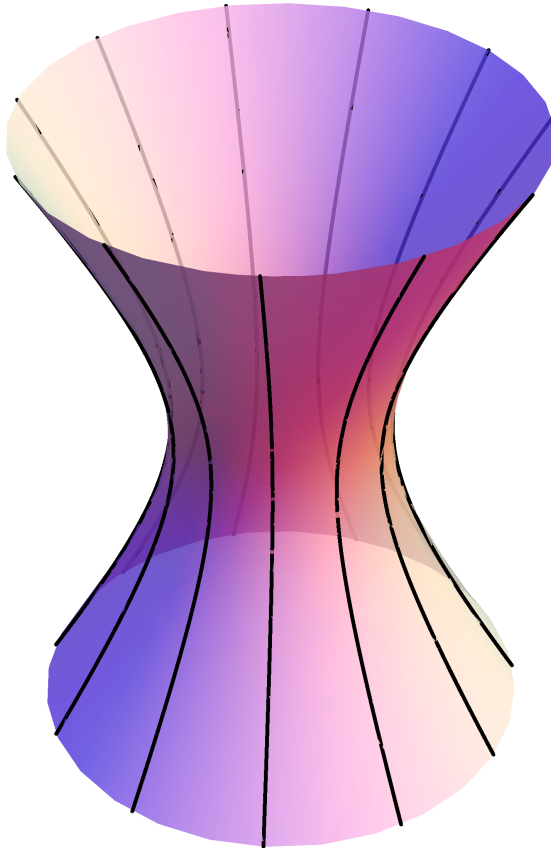
Ea vizualizează subdomeniul paralelipipedului $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$ în care “pred” este adevărat.

3.7.2 (* RegionPlot3D - Hiperboloidul cu o pânză *)

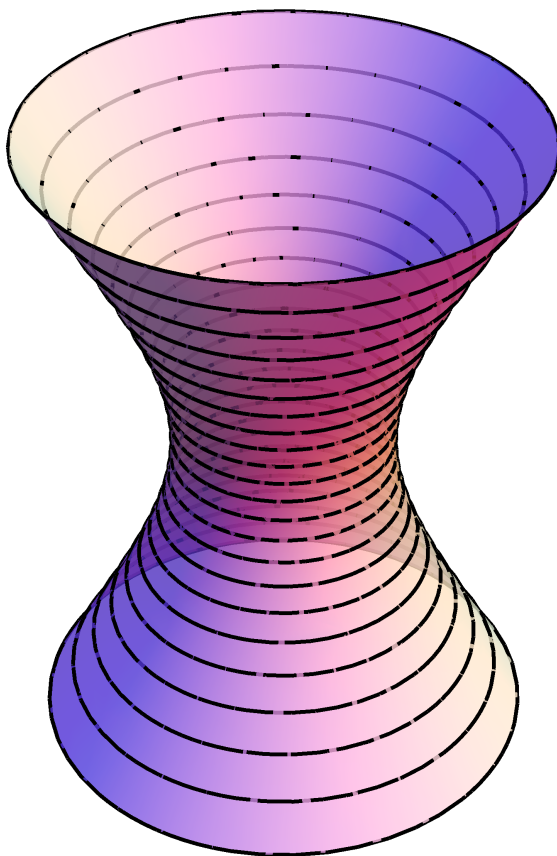
```
regplot = RegionPlot3D[x2 + y2 -  $\frac{z^2}{(\frac{3}{2})^2}$  ≤ 1,  
{x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3},  
Mesh->False, Boxed → False, Axes → False]
```



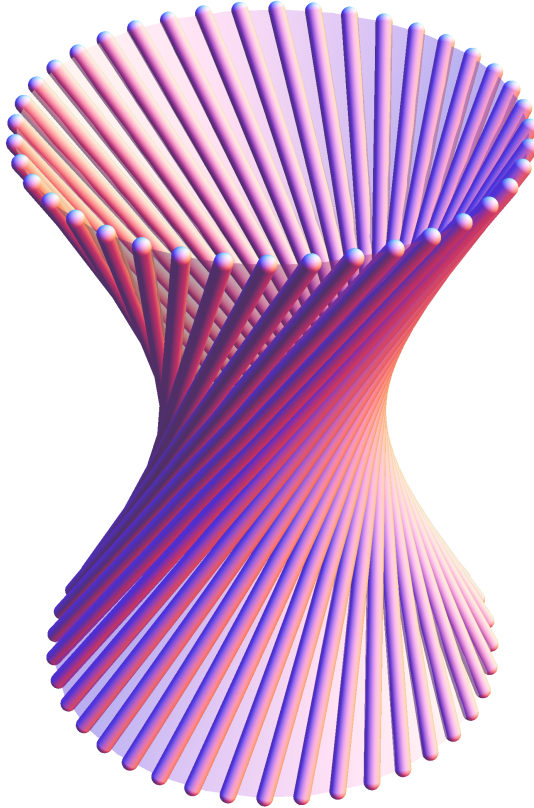
Analog obținem:



Generatoare hiperbolice ale hiperboloidului cu o pânză



Generatoare eliptice ale hiperboloidului cu o pânză



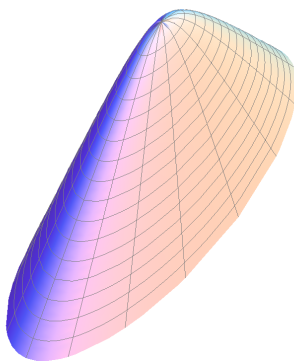
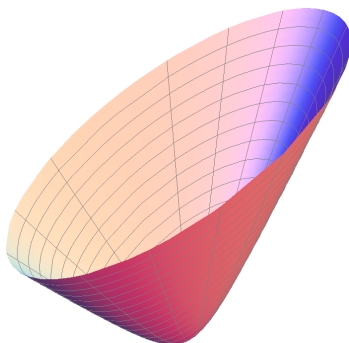
Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

3.7.3 (* Hiperboloidul cu doua pânze*)

```

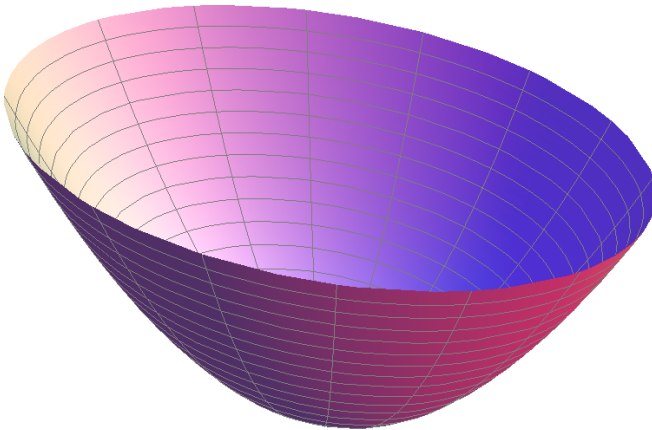
ParametricPlot3D[{
{1/3((Sqrt[p^2 - 1] + p) - 1/(Sqrt[p^2 - 1] + p))/2Cos[t],
((Sqrt[p^2 - 1] + p) - 1/(Sqrt[p^2 - 1] + p))/2Sin[t], p},
{1/3((Sqrt[p^2 - 1] + p) - 1/(Sqrt[p^2 - 1] + p))/2Cos[t],
((Sqrt[p^2 - 1] + p) - 1/(Sqrt[p^2 - 1] + p))/2Sin[t], -p}},
{t, -Pi, Pi}, {p, 1, 5},
Boxed->False, Axes->False

```



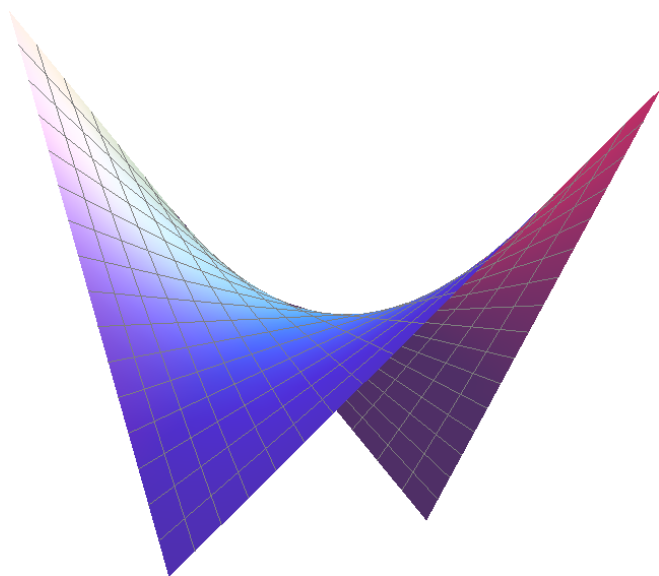
3.7.4 (* Paraboloidul eliptic *)

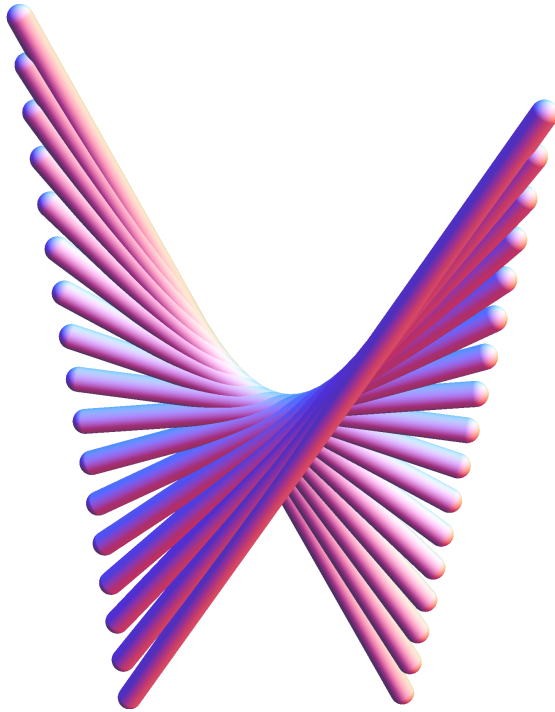
```
ParametricPlot3D[{Sqrt[2p]Cos[t], 2/3Sqrt[2p]Sin[t], p},  
{t, -Pi, Pi}, {p, 0, 2}, Boxed → False, Axes → False,  
PlotPoints → {29, 9}]
```



3.7.5 (* Paraboloidul hiperbolic*)

```
ParametricPlot3D[{(v - u)/2, (v + u)/2 * N[Sqrt[5]], uv/2},  
{u, -2, 5}, {v, -3, 4}, Boxed → False, Axes → False,  
PlotPoints → {13, 9}, ViewPoint → {2, 2, 2.5}]
```

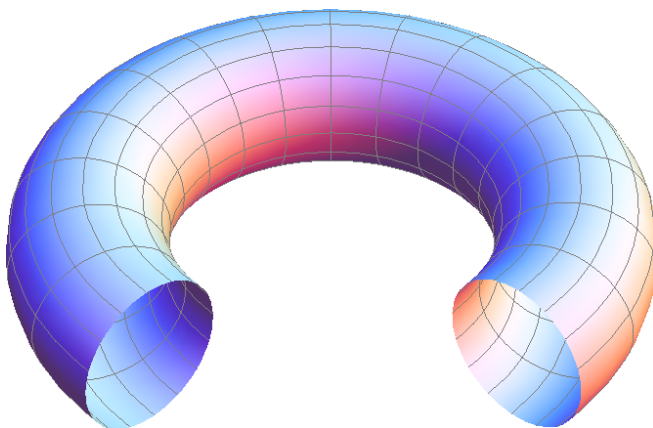




Generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

3.7.6 (* Tor *)

`ParametricPlot3D[{(3 + Cos[t])Cos[p], (3 + Cos[t])Sin[p], Sin[t]},
{t, 0, 2Pi}, {p, -4.7, 0},
Boxed → False, Axes → False, ViewPoint → {1, 1, 1}]`



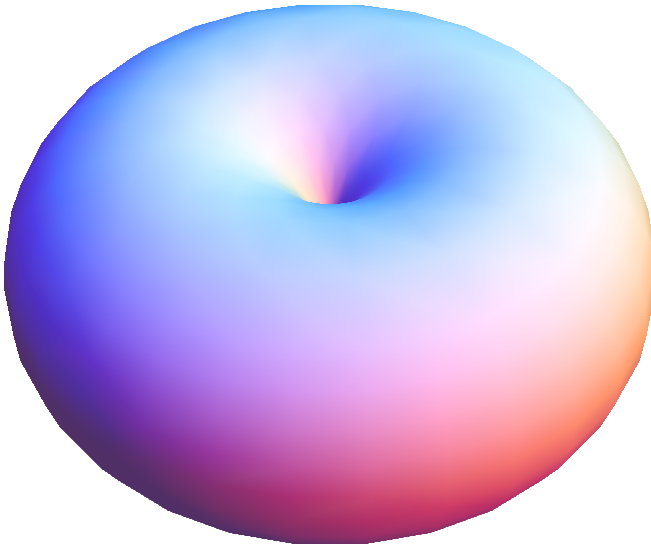
3.7.7 (* Tor 2*)

`ParametricPlot3D[{(1 + Cos[t])Cos[p], (1 + Cos[t])Sin[p], Sin[t]},
{t, 0, 2Pi}, {p, -2π, 0},`

`Boxed → False,`

`Axes → False, Mesh → False,`

`ViewPoint → {1, 1, 1}]`

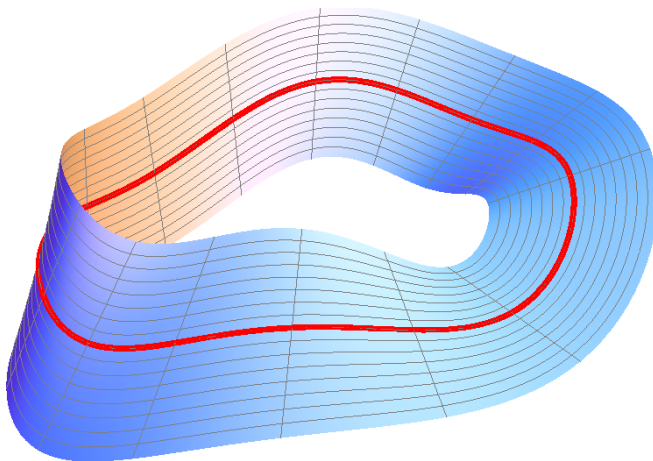


3.7.8 (* Banda lui Moebius *)

```

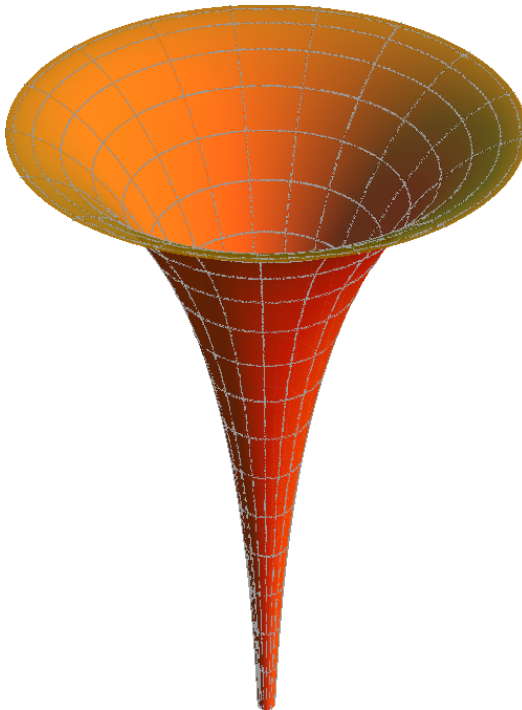
view = {0.5, -2, 0.7}; m = 70; diamgen = 0.22; m2 = 70;
banda = ParametricPlot3D[
  {(6 + Cos[u] + vCos [u/2]) Cos[u], 2 (5 + Sin[u] + vCos [u/2]) Sin[u],
  0.4Sin[4u] + vSin [u/2]}, {u, 0, 2π}, {v, -2, 2},
  Boxed → False, Axes → False, PlotPoints → {145, 9},
  ViewPoint → view];
liniemijloc = ParametricPlot3D[
  {(6 + Cos[u])Cos[u], 2(5 + Sin[u])Sin[u], 0.4Sin[4u]},
  {u, 0, 2π}, Boxed → False, Axes → False, PlotPoints → {145, 9},
  ViewPoint → view, PlotStyle → {Red, Thickness[0.007]},
  ViewPoint → view];
Show[banda, liniemijloc]

```



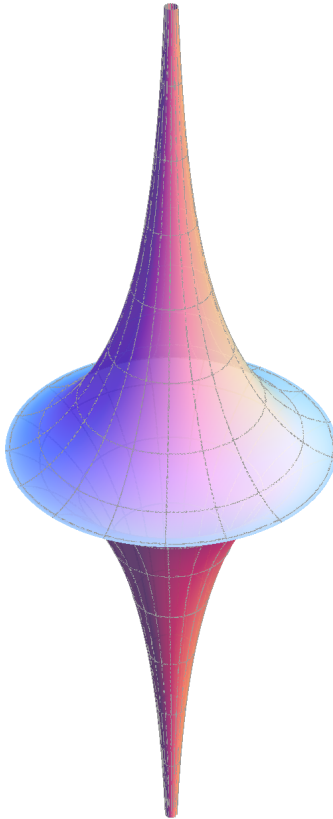
3.7.9 (* Semi Pseudosfera)*

```
ParametricPlot3D[{Sech[u]Cos[v], Sech[u]Sin[v], u - Tanh[u]},  
{u, -4, 0}, {v, 0, 2Pi},  
PlotPoints → 201, Boxed → False, Axes → False, ImageSize → 500,  
PlotStyle->Directive[{Opacity[0.9], Orange}],  
Mesh → 16, MeshStyle → Directive[{GrayLevel[.6], Thickness[.003]}],  
PlotRange → Automatic]
```



3.7.10 (* Pseudosfera)*

```
ParametricPlot3D[{Sech[u]Cos[v], Sech[u]Sin[v], u - Tanh[u]},  
{u, -4, 4}, {v, 0, 2Pi},  
PlotPoints → 201, Boxed → False, Axes → False, ImageSize → 500,  
PlotStyle->Directive[{Opacity[0.9]}],  
Mesh → 16, MeshStyle → Directive[{GrayLevel[.6], Thickness[.003]}],  
PlotRange → Automatic]
```



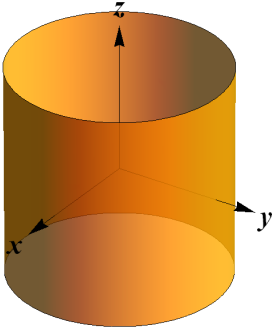
3.8 Calcul volume corpuri

Vom da ca exemplu calculul volumul corpului obținut prin intersecția cilindrilor:

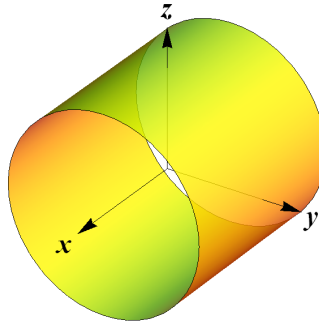
$$C_{xy} : x^2 + y^2 \leq R^2, \quad C_{yz} : y^2 + z^2 \leq R^2, \quad C_{zx} : z^2 + x^2 \leq R^2,$$



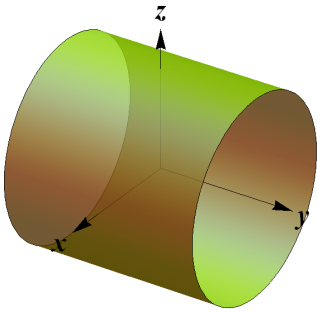
Folosind comenzile `ContourPlot3D` și `RegionPlot3D`, obținem graficele de pe pagina următoare:



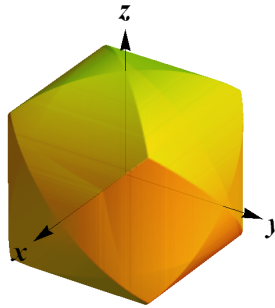
C_{xy}



C_{yz}

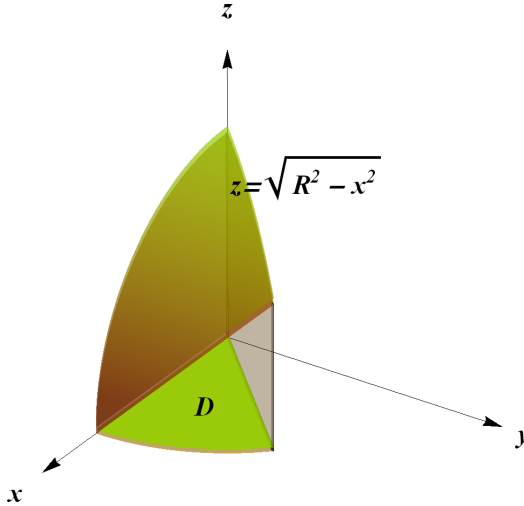


C_{zx}



$C_{xy} \cap C_{yz} \cap C_{zx}$

Calculăm volumul unei șaisprezecimi de corp.



$$\frac{1}{16} C_{xy} \cap C_{yz} \cap C_{zx}$$

Trecând la coordonate sferice, obținem

$$16 \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cos[\theta]^2 \rho \, d\rho \right) d\theta$$

$$8 (2 - \sqrt{2}) (R^2)^{3/2}$$

sau folosim o metodă generală

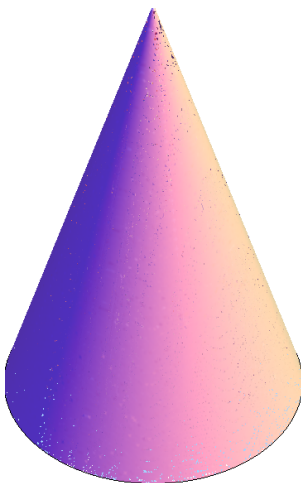
FullSimplify

$$\int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R \left(\int_{-R}^R \text{Boole}[x^2 + y^2 \leq R^2 \ \&\& \ y^2 + z^2 \leq R^2 \ \&\& \ z^2 + x^2 \leq R^2] \right. \right. \\ \left. \left. dx \right) dy \right) dz, \quad R > 0]$$

$$-8 (-2 + \sqrt{2}) (R^2)^{3/2}$$

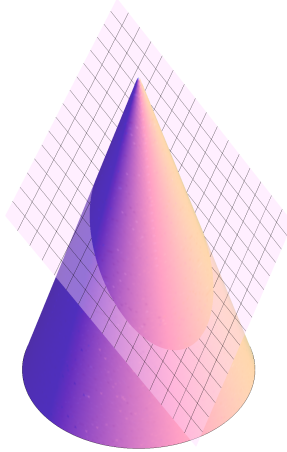
3.9 Aplicații MATHEMATICA la vizualizarea conicelor

Considerăm un con

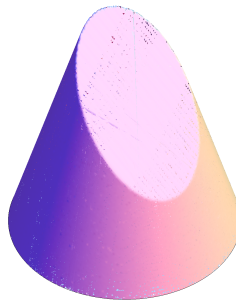


Prin intersecția conului cu diferite plane se obțin *conice*.

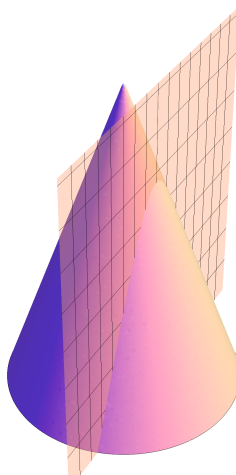
Dacă intersectăm
conul cu un
plan neparalel cu
înălțimea, sau cu o
generatoare, obținem
o



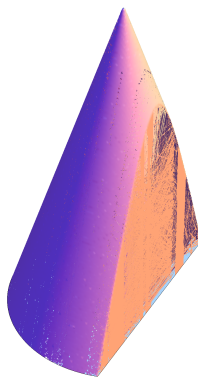
o elipsă.



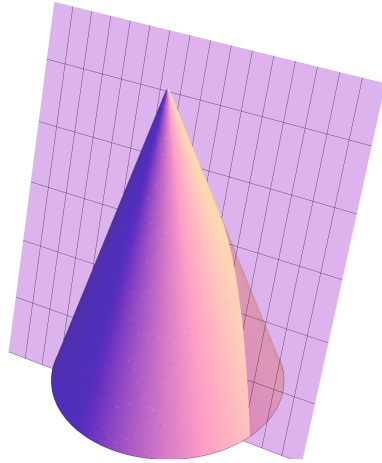
Dacă intersectăm
conul cu un plan
paralel cu înălțimea,
obținem o



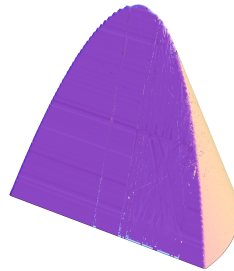
hiperbolă.



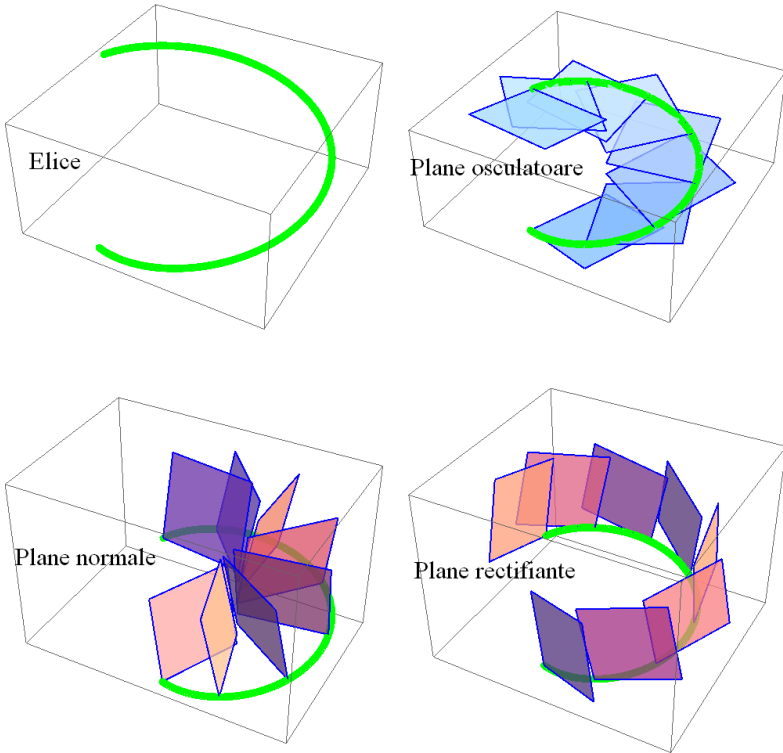
Dacă intersectăm
conul cu un plan par-
alel cu o generatoare,
obținem o



parabolă.



3.9.1 (* Plane osculatoare, normale și rectifiante la elice)*

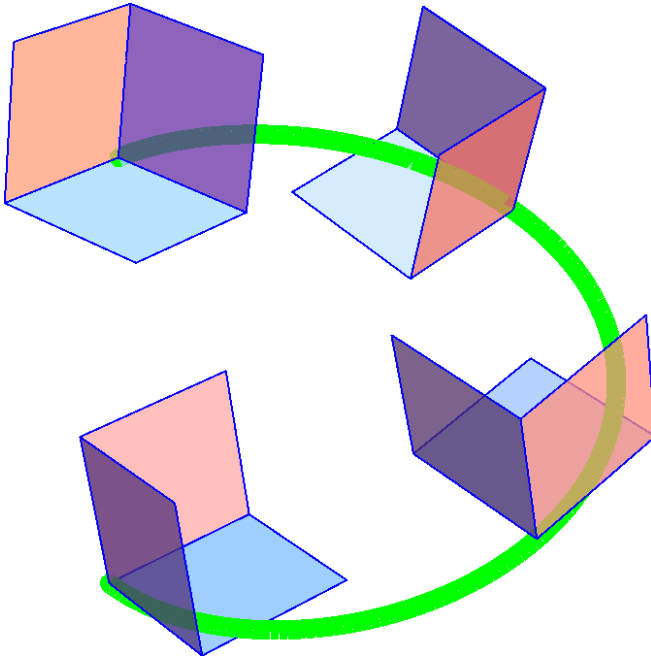


Planele osculatoare, normale și rectifiante la elicea

$$(\cos t, \sin t, 0.2 t), \quad t \in [-2, 3].$$

mai exact, pătrate construite pe versorii
tangentei, normalei și binormalei.

3.9.2 (* Triedrul lui Frenet la elice)*



Planele triedrului lui Frenet al elicei

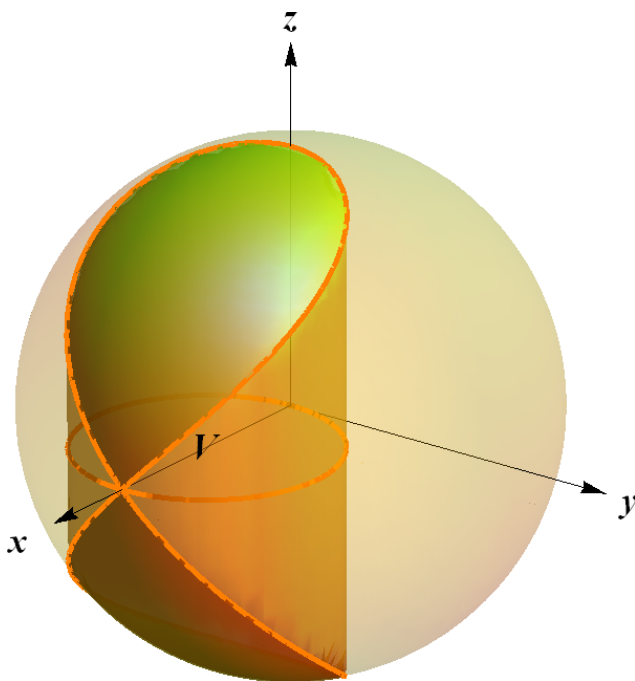
$$(\cos t, \sin t, 0.2 t), \quad t \in [-2, 3].$$

3.9.3 (* Corpului lui Viviani *)

Corpul lui Viviani se obține prin decuparea unui cilindru dintr-o sferă

$$V : \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{R}{2}\right)^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

Vizualizarea se face folosind comenzile `RegionPlot3D` și `ParametricPlot3D`.

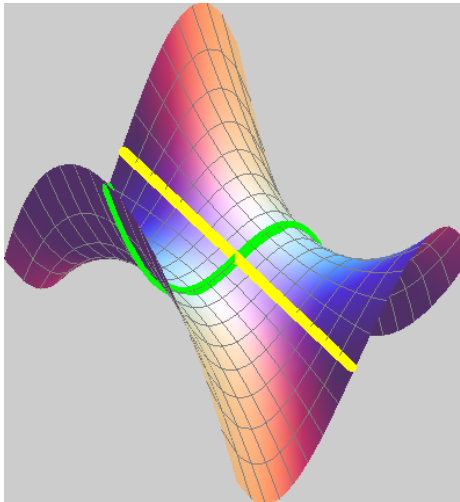


3.9.4 (* Șaua maimuței *)

```

u0 = -1.8; u1 = 1.8; v0 = -1.8; v1 = 1.8;
sauamaimutei = ParametricPlot3D[{u, v, u3 - uv2}, {u, u0, u1},
{v, v0, v1}, Boxed → False, Axes → False, Mesh → True,
MeshStyle → Directive[Gray], Background → GrayLevel[.8],
PlotStyle → Directive[{Opacity[1]}], ViewPoint → {1, 1, 4}];
curbaU = ParametricPlot3D[{u, 0, u3}, {u, u0 + 0.1, u1 - 0.02},
Boxed → False, Axes → False,
PlotStyle → Directive[{Green, Thickness[.02]}],
Background → GrayLevel[.7], ViewPoint → {1, 1, 1}];
curbaV = ParametricPlot3D[{0, v, +0.01}, {v, v0 + 0.04, v1 - 0.04},
Boxed → False, Axes → False,
PlotStyle → Directive[{Yellow, Thickness[.02]}],
Background → GrayLevel[.7], ViewPoint → {2, 2, 3}];

```



4.1 Comanda RGBColor

4.1.1 `RGBColor["rosu", "verde", "albastru", "opacitate"]`

unde parametri "rosu", "verde", "albastru", "opacitate" iau valori in intervalul $[0, 1]$.

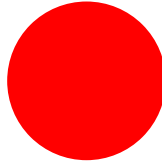
4.2 Comanda CMYKColor

4.2.1 `CMYKColor["cyan", "magenta", "yellow", "black"]`

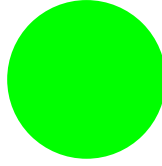
unde parametri "cyan", "magenta", "yellow", "black" și eventual, "opacitate" iau valori in intervalul $[0, 1]$.

(* Exemple: *)

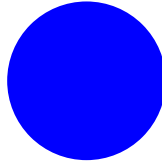
`Graphics[{RGBColor[1, 0, 0], Disk[]}]`



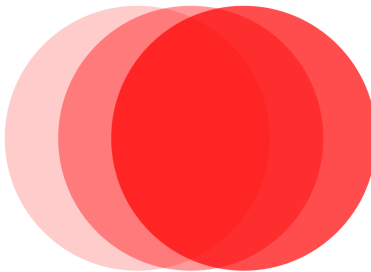
`Graphics[{RGBColor[0, 1, 0], Disk[]}]`



`Graphics[{RGBColor[0, 0, 1], Disk[]}]`



`Graphics[{
 {RGBColor[1, 0, 0, .2], Disk[{0, 0]}},
 {RGBColor[1, 0, 0, .4], Disk[{0.4, 0]}},
 {RGBColor[1, 0, 0, .7], Disk[{0.8, 0]}}}, ImageSize → 1000]`



```
Show[Graphics[{  
Text[Style["Cyan", 40, Bold, CMYKColor[1, 0, 0, 0]], {0, 0}],  
Text[Style["Magenta", 40, Bold, CMYKColor[0, 1, 0, 0]], {15, 5}],  
Text[Style["Yellow", 40, Bold, CMYKColor[0, 0, 1, 0]], {30, 10}],  
Text[Style["Black", 40, Bold, CMYKColor[0, 0, 0, 1]], {40, 15}]]]
```



The image displays four words in bold, sans-serif font, each in a different color: 'Cyan' (cyan), 'Magenta' (magenta), 'Yellow' (yellow), and 'Black' (black). The words are arranged in a staggered, overlapping fashion, with 'Cyan' at the bottom left, 'Magenta' above it, 'Yellow' above that, and 'Black' at the top right.

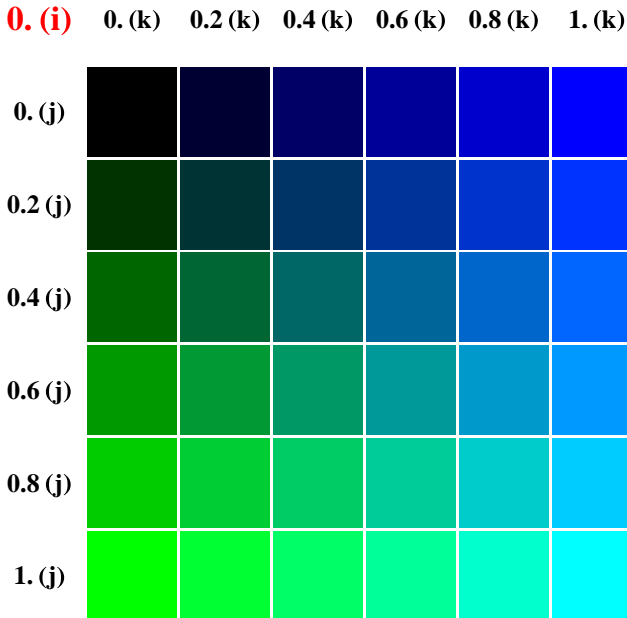
Prezentăm, în continuare, tabele de culorile RGB, după modelul urmator.

i	k
j	RGBColor[i,j,k]

```

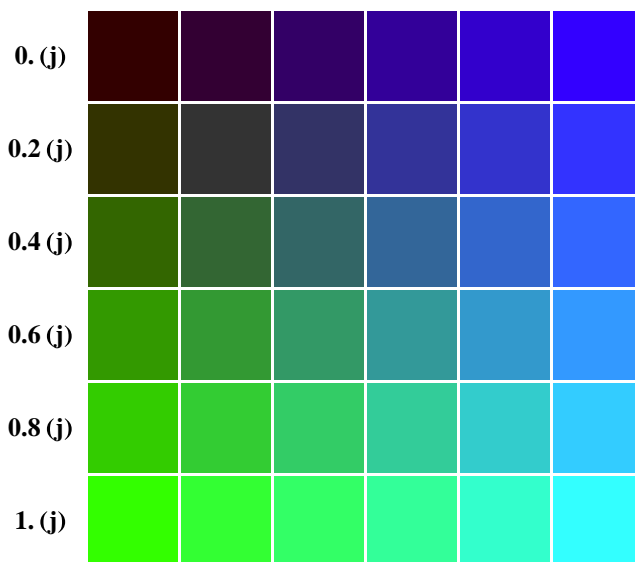
Table[GraphicsGrid[Table[
If[j == -.2&&k == -.2, i" ( = i)",
If[k == -.2, j" ( = j )",
If[j == -.2, k" ( = k )",
Graphics[{RGBColor[i, j, k], Rectangle[]}]],
{j, -.2, 1, .2}, {k, -.2, 1, .2}], ImageSize -> 700], {i, 0, 1, .2}];

```



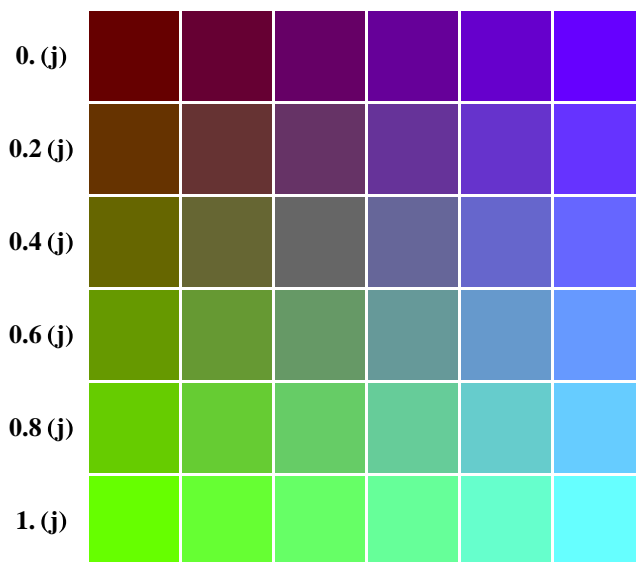
RGBColor[0 , j, k]

0.2 (i) 0. (k) 0.2 (k) 0.4 (k) 0.6 (k) 0.8 (k) 1. (k)



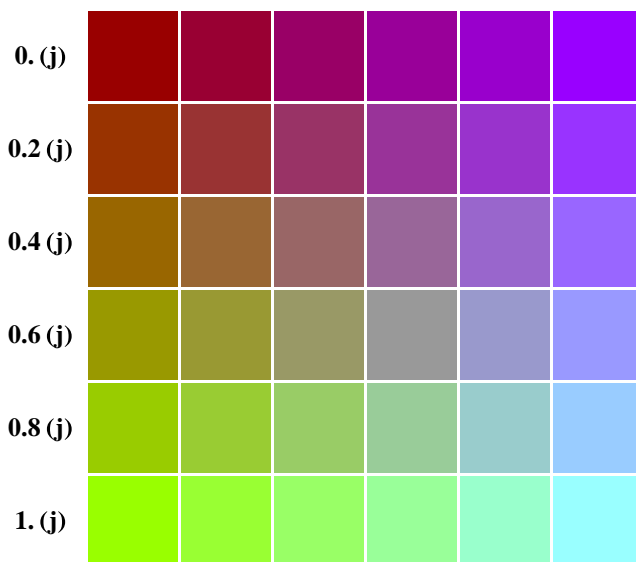
RGBColor[.2 , j, k]

0.4 (i) 0. (k) 0.2 (k) 0.4 (k) 0.6 (k) 0.8 (k) 1. (k)



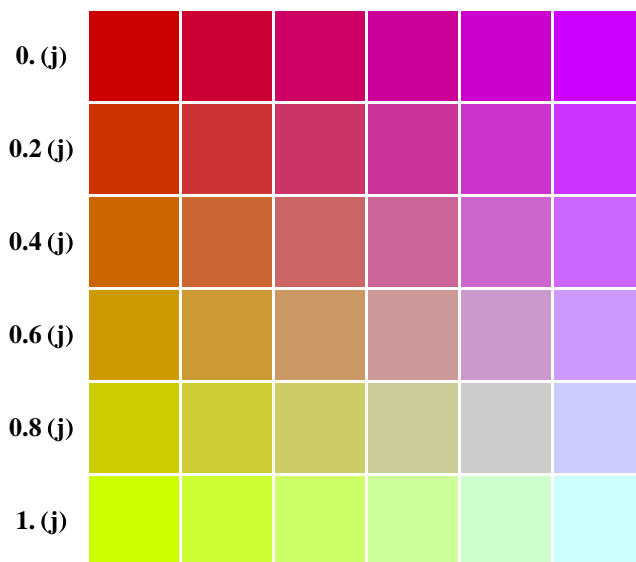
RGBColor[.4 , j, k]

0.6 (i) **0. (k)** **0.2 (k)** **0.4 (k)** **0.6 (k)** **0.8 (k)** **1. (k)**



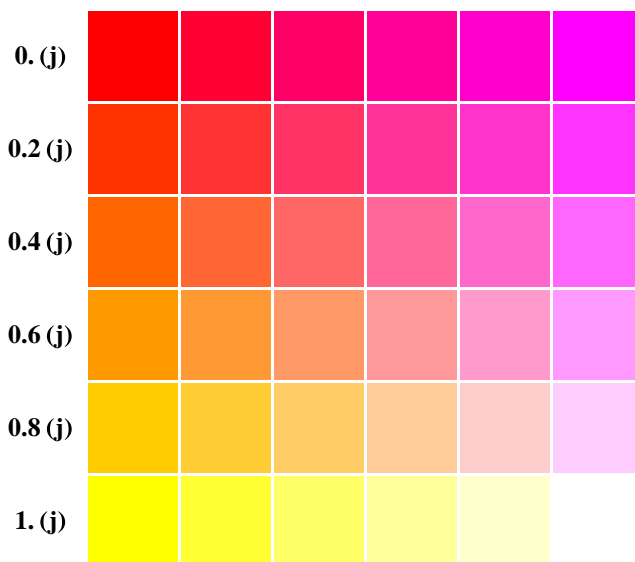
RGBColor[.6 , j, k]

0.8 (i) 0. (k) 0.2 (k) 0.4 (k) 0.6 (k) 0.8 (k) 1. (k)



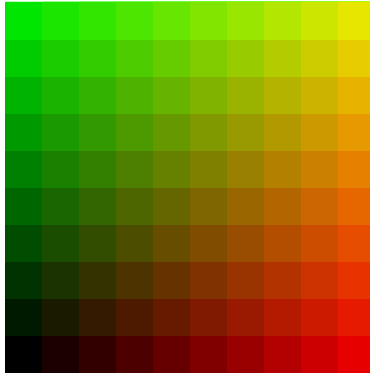
`RGBColor[.8, j, k]`

1. (i) 0. (k) 0.2 (k) 0.4 (k) 0.6 (k) 0.8 (k) 1. (k)

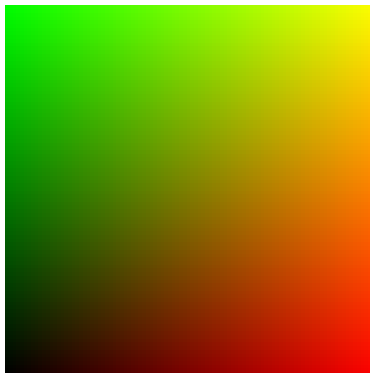


RGBColor[1 , j, k]

```
 $h = 0.1;$   
Graphics[Table[{RGBColor[ $i, j, 0$ ], Rectangle[{ $i, j$ }, {1, 1}]}, { $i, 0, 1, h$ },  
{ $j, 0, 1, h$ }]
```

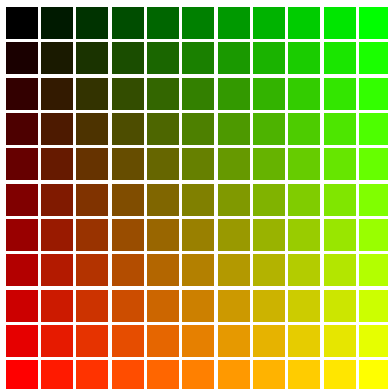


```
 $h = 0.01;$   
Graphics[Table[{RGBColor[ $i, j, 0$ ], Rectangle[{ $i, j$ }, {1, 1}]}, { $i, 0, 1, h$ },  
{ $j, 0, 1, h$ }]
```

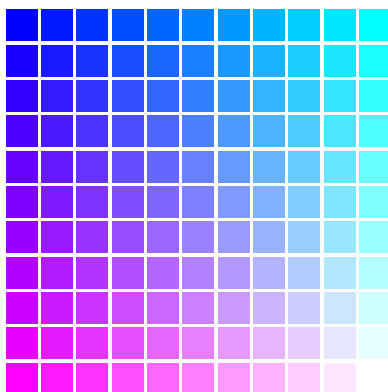


$h = 0.1;$

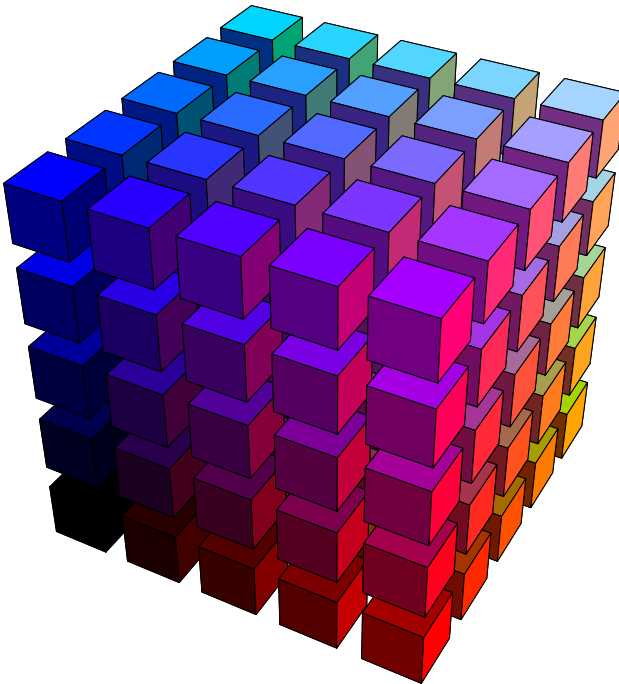
```
GraphicsGrid[Table[Graphics[{RGBColor[i, j, 0], Rectangle[{i, j}],  
{i, 0, 1, h}, {j, 0, 1, h}]]]
```

 $h = 0.1;$

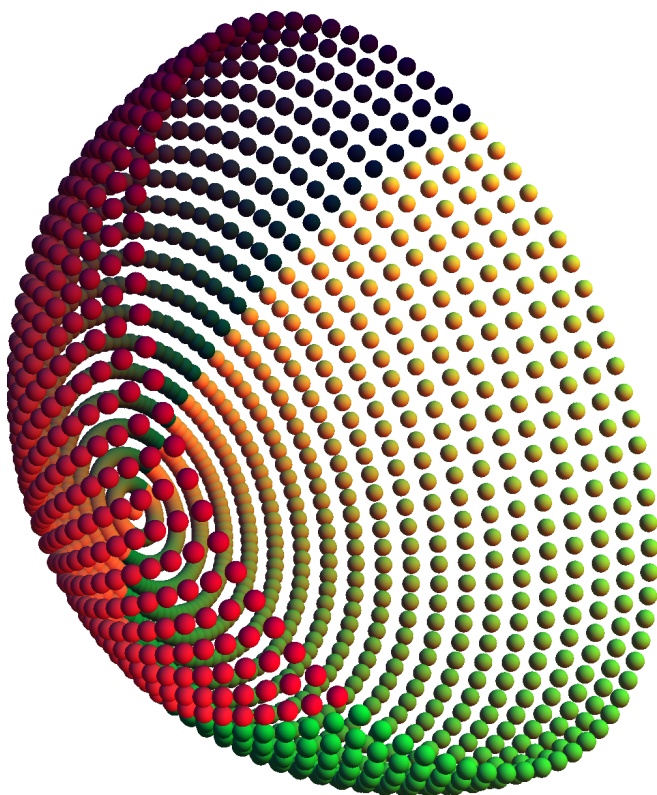
```
GraphicsGrid[Table[Graphics[{RGBColor[i, j, 1], Rectangle[{i, j}],  
{i, 0, 1, h}, {j, 0, 1, h}]]]
```



```
h = .25;  
Graphics3D[  
Table[{RGBColor[{i, j, k}], Cuboid[{i, j, k}, {i, j, k} + h.7{1, 1, 1}],  
{i, 0, 1, h}, {j, 0, 1, h}, {k, 0, 1, h}], Boxed → False]
```



Analog obținem semisfera



Bibliografie la partea I-a

1. John Gray. *Mastering Mathematica*. Academic Press Inc., San Diego, CA, second edition, 1998. Programming methods and applications, With 1 CD-ROM (Macintosh, MS-DOS, NeXT and UNIX).
2. Mircea Ivan. *Numerical Analysis with Mathematica*. Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 2005. ISBN 973-713-051-0, 252p.
3. Mircea Ivan. *Calculus with Mathematica*. Mathematica Collection. Mediamira Science Publisher, Cluj-Napoca, 2006. ISBN (10) 973-713-135-5, ISBN (13) 978-973-713-135-5, 360 p.
4. Heikki Ruskeepää. *Mathematica Navigator, Second Edition: Mathematics, Statistics, and Graphics*. Elsevier Academic Press, second edition, 2004.
5. Cameron Smith and Nancy Blachman. *The Mathematica Graphics Guidebook*. Addison Wesley Publishing Company, 1995.

Partea II

ALGEBRĂ LINIARĂ

5.1 Operații cu vectori și matrice

Spațiul vectorilor geometrici tridimensionali, \mathbb{R}^3 , este alcătuit din triplete ordonate de numere reale. Prin generalizare, \mathbb{R}^n este alcătuit din sistemele ordonate de n numere reale

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \text{ cu } x_i \in \mathbb{R}.$$

Acestea reprezintă *vectori reali n-dimensionali*.

Convenție:

Vectorii vor fi simbolizați prin caractere îngroșate, în timp ce pentru scalari se vor utiliza caractere simple.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, vectorii reali n -dimensionali se adună între ei și se înmulțesc cu numere reale componentă cu componentă:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Cele două operații prezentate mai sus definesc în \mathbb{R}^n o structură algebrică de *spațiu vectorial real*.

Comentariu:

În *Mathematica* (prescurtat “**M**”), un sistem ordonat de elemente (numere, simboluri etc.) reprezintă o *listă*. Astfel, vectorul tridimensional $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ va fi

$$\mathbf{v} = \text{List}[1, 2, 3]$$

$$\{1, 2, 3\}$$

Similar, matricea

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cu care, înmulțind vectorul tridimensional \mathbf{v} , acesta se va roti cu 90° în jurul axei Ox_3 în sens direct, reprezintă tot o listă și anume,

$$\mathbf{R} = \text{List}[\{0, -1, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}]$$

$$\{\{0, -1, 0\}, \{1, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

Rotitul lui \mathbf{v} va fi atunci produsul matriceal (operație notată cu punct)

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}$$

$$\{-2, 1, 3\}$$

Să observăm că lista-vector \mathbf{v} joacă aici rol de matrice-coloană, dar ea poate juca și rol de matrice-linie când facem produsul

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}$$

$$\{2, -1, 3\}$$

5.2 Operații elementare cu vectori. Discutarea și rezolvarea unui sistem liniar

Să considerăm o matrice $\mathbf{A}_{m \times n}$ și următoarele trei tipuri de operații - numite *elementare* - cu liniile sale:

- O1) permutarea a două linii;
- O2) înmulțirea unei linii cu un număr nenul;
- O3) scăderea unei linii, înmulțită cu un număr, din altă linie.

Orice secvență de operații elementare este considerată la rândul său operație elementară. Pentru efectuarea unei astfel de operații în “ \mathbf{M} ”, definim comanda `OpElem[A][i, j][k]`, unde \mathbf{A} este matrice, i și j sunt întregi pozitivi, iar k este un întreg. Această comandă acționează în felul următor:

- pentru $k < 0$, *permută* liniile i și j din \mathbf{A} ;

- pentru $k = 0$, împarte linia i la a_{ij} , dacă $a_{ij} \neq 0$;
- pentru $k > 0$, scade din linia j linia i a lui A amplificată cu a_{jk}/a_{ik} , dacă $a_{ik} \neq 0$.

```

Opelem[A_/;MatrixQ[A]][i_/;IntegerQ[i]&& i > 0,
j_/;IntegerQ[j]&& j > 0][k_/;IntegerQ[k]] :=
Block[{a = A}, Which[k < 0, a[[{i, j}]] = a[[{j, i}]], k == 0 && a[[i, j]] != 0,
a[[i]] = a[[i]]/a[[i, j]], k == 0 && a[[i, j]] == 0,
Print["elementul[" , i, ", " , j, "] = 0"], k > 0 && a[[i, k]] != 0,
a[[j]] = a[[j]] - a[[i]] * a[[j, k]]/a[[i, k]], a[[i, k]] == 0,
Print["elementul[" , i, ", " , k, "] = 0"]]; a

```

Aplicație

Ca primă aplicație, prezentăm una dintre cele mai eficiente metode de a stabili compatibilitatea și apoi de a găsi soluțiile unui sistem linear neomogen. Sistemul linear analizat aici are matricea extinsă

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 3 & s \\ 1 & 3 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

s fiind un parametru. Vom căuta valorile lui s pentru care sistemul are soluții, iar apoi vom determina respectivele soluții.

Rezolvare

Prin operații elementare efectuate cu ajutorul comenzii `Opelem`, aducem matricea **A** la *forma redusă pe linii*, formă ce se caracterizează prin proprietatea: *fiecare linie a matricei, de la a doua în jos, începe cu mai multe zerouri decât linia precedentă, existând și posibilitatea ca ultimele linii să fie nule.*

Întrucât operațiile elementare modifică matricea extinsă, dar nu modifică mulțimea (posibil vidă) a soluțiilor sistemului, vom transfera discutarea compatibilității sale și determinarea eventualelor soluții, la sistemul echivalent având matricea redusă pe linii. Iată un șir de operații elementare ce realizează forma redusă pe linii pentru matricea **A**:

$$A_1 = \text{Opelem}[A][1, 2][1]; A_1 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -8 + s \\ 1 & 3 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \text{Opelem}[A_1][1, 3][1]; A_2 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -8 + s \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \text{Opelem}[A_2][1, 4][1]; A_3 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -8 + s \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \text{Opelem}[A_3][2, 4][-1]; A_4 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -8 + s \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \text{Opelem}[A_4][3, 4][3]; A_5 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + s \end{pmatrix}$$

Condiția de compatibilitate a sistemului obținut, deci și a celui dat, poate fi acum descoperită observând că ultima ecuație are, de fapt,

forma

$$0 = -1 + s.$$

Dacă $s \neq 1$, atunci ultima ecuație, deci și întreg sistemul, vor fi *incompatibile*. Dar dacă $s = 1$, atunci sistemul se reduce la primele trei ecuații.

Ultima ecuație, $-5x_3 + x_4 = -7$, are două necunoscute, deci este *nedeterminată*. Alegând pe x_4 ca parametru, deci un număr real cunoscut dar neprecizat ($x_4 \in \mathbb{R}$), el trece în membrii dreپți ai tuturor ecuațiilor, iar sistemul capătă forma

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 - x_4 \\-x_2 - 2x_3 &= -3 \\x_3 &= (7 + x_4)/5\end{aligned}$$

și un algoritm simplu, cunoscut sub numele de *substituții regresive*, ne permite găsirea tuturor soluțiilor sale; în acest caz - o infinitate:

I: x_3 din ultima ecuație este înlocuit în precedentele și se obține x_2 ;

II: x_2 din penultima ecuație este înlocuit în prima și se obține x_1 .

În general, după alegerea și trecerea parametrilor în membrii dreپți, sistemul superior triunghiular¹ astfel obținut se rezolvă începând de la ultima ecuație și ultima necunoscută până la prima ecuație și prima necunoscută prin acest procedeu regresiv.

¹O matrice $m \times m$ este superior triunghiulară dacă elementele aflate sub diagonala sa sunt nule. Un sistem liniar cu m ecuații și m necunoscute este superior triunghiular dacă are matricea de acest tip.

5.3 Rangul și forma canonică (redușă) pe linii a unei matrice $m \times n$

Discutarea și rezolvarea sistemelor liniare este, desigur, un subiect important și la care, de altfel, vom reveni. Dar problematica pe care o deschide ține de cadrul mai general al spațiilor vectoriale. În această perspectivă, extindem discuția la matricele dreptunghiulare și reducerea lor prin operații elementare aplicate liniilor.

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \text{Opelem}[A][1, 2][1]; A_1 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -6 \\ -2 & 4 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \text{Opelem}[A_1][1, 3][1]; A_2 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$A_3 = \text{Opelem}[A_2][2,3][3]; A_3 // \text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

În cazul de față, matricea A_3 , o formă redusă pe linii pentru matricea A , nu conține linii nule. Primul element nenul al fiecărei linii (nenule) se numește *pivot*. Aici pivoții sunt: 1, -5 și $12/5$. Numărul pivoților este egal cu ceea ce se numește de obicei *rangul matricei*. Aici, $\text{rang}(A_3) = 3$. La această matrice, pivoții sunt așezați în coloanele 1, 3 și 5. Trebuie spus că și $\text{rang}(A) = 3$, deoarece o matrice obținută din alta prin operații elementare are același rang cu ea.

Rangul este o caracteristică a oricărei matrice, dar el nu se poate citi direct decât în cazuri speciale, cum este cel al matricei reduse pe linii. Aducerea unei matrice prin operații elementare la forma redusă pe linii este, poate, cea mai simplă dintre metodele de determinare a rangului. Dar forma redusă pe linii a unei matrice nu este cea mai simplă formă obținută prin operații elementare. În exemplul considerat, plecând de la matricea A_3 , putem continua operațiile elementare

după cum urmează:

$$A_4 = \text{Opelem}[A_3][3, 2][5]; A_4 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \text{Opelem}[A_4][3, 1][5]; A_5 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \text{Opelem}[A_5][2, 1][3]; A_6 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

Precum se observă, începând cu pivotul $12/5$, am anulat prin operația elementară O_3 elementele aflate deasupra lui. Apoi am repetat aceeași operație cu pivotul -5 din a treia coloană. În final, împărțim fiecare

linie la pivotul său prin operația O2:

$$A_7 = \text{Opelem}[A_6][2, 3][0]; A_7 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \text{Opelem}[A_7][3, 5][0]; A_8 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Am ajuns la o nouă formă redusă pe linii a matricei A din acest exemplu, formă pe care o vom numi *forma canonică (redușă) pe linii*. Ea are toți pivoții 1 și 0 în restul coloanei acestora. O matrice A are, în general, o infinitate de forme reduse pe linii, dar *o singură formă canonică redusă pe linii*. În “**M**”, comanda `RowReduce` aplicată oricărei matrice produce forma sa canonică redusă pe linii:

$$\text{RowReduce}[A] // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.1 Subspațiile fundamentale ale matricei reale

$m \times n$

6.1.1 Subspațiul coloanelor

Exemplu

Să considerăm sistemul liniar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ următor, alcătuit din trei ecuații cu trei necunoscute și termeni liberi neprecizați:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = b_1$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_2$$

$$5x_1 + 6x_2 + x_3 = b_3$$

Aplicăm operații elementare matricei extinse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 2 & 3 & 1 & b_2 \\ 5 & 6 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$$

pentru a o aduce la forma redusă pe linii:

`Opelem[A][1,2][1]//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2b_1 + b_2 \\ 5 & 6 & 1 & b_3 \end{pmatrix}$$

`Opelem[%][1,3][1]//MatrixForm1`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & -4 & -4 & -5b_1 + b_3 \end{pmatrix}$$

`Opelem[%][2,3][2]//MatrixForm//Simplify`

¹În "**M**": % reprezintă rezultatul ultimei operații; aici matricea obținută din **A** în urma primei operații elementare

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 - 4b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

Similar cazului întâlnit în §5.2, și aici ultima relație a sistemului obținut are forma

$$0 = 3b_1 - 4b_2 + b_3.$$

Ea reprezintă însăși condiția pe care vectorul $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ trebuie să o satisfacă pentru compatibilitate. Întrucât relația dintre coordonatele b_i este liniară și omogenă, vectorul \mathbf{b} care o satisface se va afla într-un plan ce trece prin origine. Acest plan este format dintr-o infinitate de vectori ce pleacă din origine. Din punct de vedere algebric, el reprezintă un *subspațiu* al spațiului vectorial \mathbb{R}^3 , deoarece satisface următoarele trei condiții:

- SS1) Este o submulțime nevidă a spațiului \mathbb{R}^3 .
- SS2) Odată cu orice doi vectori ai săi conține și suma lor.
- SS3) Odată cu orice vector al său conține și produsele lui cu toți scalarii reali.

Observații:

- 1) Cele trei condiții de mai sus definesc noțiunea generală de subspațiu al unui spațiu vectorial. Ele au drept consecință faptul că submulțimea respectivă este la rândul său un spațiu vectorial în raport cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari.

- 2) Planul vectorilor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ pentru care sistemul liniar din exemplu este compatibil depinde de matricea \mathbf{A} a acestuia, se va numi *subspațiul coloanelor* sau *imaginea* lui \mathbf{A} și va fi notat $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$. Pentru cazul general, vedeți observația 5.
- 3) Întrucât compatibilitatea se exprimă vectorial sub forma

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

iar, pe de altă parte (exercițiul 7(1)),

$$\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3,$$

unde \mathbf{a}_i sunt coloanele lui \mathbf{A} , vom reformula această condiție astfel:

Criteriul de compatibilitate a sistemului $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Sistemul liniar neomogen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, cu \mathbf{A} matrice $m \times n$, este compatibil exact atunci când \mathbf{b} este combinație liniară a coloanelor lui \mathbf{A} .

- 4) Numim combinație liniară a vectorilor $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ cu scalarii $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ vectorul $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i$.
- 5) Mulțimea acestor combinații, când vectorii sunt fixați iar scalarii parcurg \mathbb{R} , alcătuiesc *subspațiul vectorial al lui \mathbb{R}^m generat de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$* . Când acești vectori sunt coloanele lui \mathbf{A} , acesta este subspațiul coloanelor sale (sau imaginea sa) notat $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$, iar criteriul de compatibilitate capătă forma condensată

$$(\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}) \Leftrightarrow \mathbf{b} \in \mathbf{Im}(\mathbf{A})$$

- 6) Subspațiul coloanelor lui \mathbf{A} poate fi exprimat ca mulțime sub forma

$$\mathbf{Im}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Condiția de compatibilitate se poate testa în “**M**” combinând comanda `LinearSolve[A, b]`, care dă, în caz de compatibilitate, o soluție a sistemului $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, și comenzile `MatrixQ` și `VectorQ`:

```
Compatibil[A_/, MatrixQ[A], b_/, VectorQ[b]] :=  
VectorQ[LinearSolve[A, b]]
```

Exemplu

Verificăm pentru care dintre următorii termeni liberi sistemul $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ este compatibil:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \{1, 2, 1\}$$

$$\mathbf{c} = \{2, 1, 2\}$$

$$\mathbf{d} = \{1, 1, 2\}$$

```
Compatibil[A, b]
```

```
True
```

fiindcă

$$\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}.$$

Compatibil $[\mathbf{A}, \mathbf{c}]$

False

Compatibil $[\mathbf{A}, \mathbf{d}]$

False

Vectorul-linie \mathbf{d} nu aparține subspațiului $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$. De fapt, el aparține subspațiului liniilor matricei \mathbf{A} .

6.1.2 Subspațiul liniilor

Exemplu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Subspațiul liniilor lui \mathbf{A} este, ca și în cazul subspațiului coloanelor, mulțimea tuturor combinațiilor liniare cu liniile lui \mathbf{A} : $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ și toți coeficienții reali x_i : $\sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{a}^i$. Întrucât liniile lui \mathbf{A} sunt coloanele transpusei \mathbf{A}^T , acest subspațiu se va nota $\mathbf{Im}(\mathbf{A}^T)$.

Proprietate

Cele trei operații elementare cu liniile lui A nu alterează, ca mulțime, subspațiul liniilor sale. Mai precis exprimat, dacă A_1 este obținută din A prin oricare din cele trei operații elementare cu liniile sale, atunci $\mathbf{Im}(A^T) = \mathbf{Im}(A_1^T)$ – exercițiul 8.1.b.

Să aducem prin operații elementare matricea A la o formă redusă pe linii:

$$A_1 = \text{Opelem}[A][1, 2][1]; A_1 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \text{Opelem}[A_1][1, 3][1]; A_2 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \text{Opelem}[A_2][2, 3][3]; A_3 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conform proprietății enunțate mai sus,

$$\mathbf{Im}(\mathbf{A}^T) = \mathbf{Im}(\mathbf{A}_1^T) = \mathbf{Im}(\mathbf{A}_2^T) = \mathbf{Im}(\mathbf{A}_3^T).$$

Așadar, spațiul liniilor lui \mathbf{A} este alcătuit din combinațiile liniare ale celor două linii nenule din \mathbf{A}_3 , \mathbf{a}_3^1 și \mathbf{a}_3^2 , cu toți coeficienții reali x_1 și x_2 : $\sum_{i=1}^2 x_i \mathbf{a}_3^i$.

Vectori liniar independenți

Despre cele două linii nenule ale matricei \mathbf{A} , \mathbf{a}_3^1 și \mathbf{a}_3^2 , se spune că *generează* spațiul $\mathbf{Im}(\mathbf{A}^T)$. Dar ele mai au o proprietate importantă: *niciuna nu este o combinație liniară a celeilalte*. Cu alte cuvinte, *niciuna nu aparține subspațiului generat de cealaltă*. Se mai spune că \mathbf{a}_3^1 și \mathbf{a}_3^2 sunt *liniar independente*.

Verificarea independenței liniare se poate face în diverse moduri. În cazul vectorilor-linie ai unei matrice $m \times n$, condiția este ca rangul acesteia să fie m ; ceea ce în “**M**” se exprimă prin comanda-test: `MatrixRank[A] == m`. Și, într-adevăr, având doi pivoți, $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2$. Întrucât cu o singură linie nu se poate genera întregul subspațiu $\mathbf{Im}(\mathbf{A}_3^T)$, rezultă că 2 este *numărul minim de generatori* pentru acest subspațiu. Este ceea ce se numește *dimensiunea sa*: $\dim \mathbf{Im}(\mathbf{A}_3^T) = 2$.

Privind acum spațiul coloanelor lui \mathbf{A}_3 , constatăm că toți vectorii săi - combinații liniare ale celor cinci coloane din \mathbf{A}_3 - au zerouri pe

ultima poziție. Nu este greu de observat că un sistem liniar 3×2 cu matricea formată din coloanele 1 și 3 din A_3 și, ca termen liber, orice vector din \mathbb{R}^3 cu ultima componentă nulă, este compatibil (exercițiul 2.2). În consecință, cele două coloane cu pivot generează $\mathbf{Im}(A_3^T)$. În plus, cititorul poate verifica și faptul că sunt liniar independente.

Am ajuns așadar la câteva concluzii importante referitoare la subspațiile $\mathbf{Im}(A_3)$ și $\mathbf{Im}(A_3^T)$:

- 1) $\dim \mathbf{Im}(A_3) = \dim \mathbf{Im}(A_3^T) = \text{rang}(A_3) = \text{rang}(A)$
- 2) Coloanele cu pivot, respectiv liniile cu pivot din A_3 generează spațiul $\mathbf{Im}(A_3)$, respectiv $\mathbf{Im}(A_3^T)$, având fiecare numărul minim de generatori.

Bază

Se numește *bază a unui spațiu (subspațiu) vectorial* orice sistem de generatori ai săi care sunt liniar independenți.

Așadar coloanele, respectiv liniile cu pivot din A_3 reprezintă baze în aceste subspații. Pentru matricea A , o bază în $\mathbf{Im}(A_3^T)$ este bază și în $\mathbf{Im}(A^T)$, deoarece aceste subspații coincid. Dar $\mathbf{Im}(A_3) \neq \mathbf{Im}(A)$, deoarece toți vectorii primului subspațiu au zero pe ultima poziție, deci regula de alegere a bazei în $\mathbf{Im}(A)$ este alta.

Regulă pentru alegerea bazei în $\mathbf{Im}(A)$

O bază în $\mathbf{Im}(A)$ este alcătuită din acele coloane ale matricei A care corespund coloanelor cu pivot din forma redusă pe linii A_3 a lui A .

Întrucât pivoții matricei A_3 se află în coloanele 1 și 3, baza în $\mathbf{Im}(A)$

va fi alcătuită din coloanele

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6.1.3 Nucleul matricei

Plecăm de la aceeași matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiție

Nucleul lui A , notat $N(A)$, este mulțimea tuturor soluțiilor sistemului liniar și omogen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ca mulțime, el se poate exprima și sub forma $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Pentru a descoperi un sistem de generatori ai săi, trebuie exprimate aceste soluții sub forma unor combinații liniare de soluții fixate. În acest scop, plecăm de la sistemul echivalent având matricea redusă pe

linii

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algoritmul *substituții regresive* (conf. §5.2): din ultima ecuație extragem $x_3 = x_4 - x_5$, iar din prima ecuație $x_1 = 2x_2 - 2x_4 - x_5$. Orice vector 5-dimensional are forma

$$\text{vect5} := \text{Table}[x_i, \{i, 5\}]$$

Înlocuim în el necunoscutele x_1 și x_3 cu ajutorul parametrilor x_2 , x_4 și x_5 , obținând astfel *soluția generală omogenă* (notată **sgo**) a sistemului algebric $Ax = 0$:

$$\text{sgo} = \text{vect5}/.\{x_1 \rightarrow 2x_2 - 2x_4 - x_5, x_3 \rightarrow x_4 - x_5\}$$

$$\{2x_2 - 2x_4 - x_5, x_2, x_4 - x_5, x_4, x_5\}$$

Aceasta, la rândul ei, se descompune în combinația liniară a trei soluții particulare omogene - câte una pentru fiecare parametru - conținând în fiecare componentă coeficientul parametrului respectiv. Construim în "**M**" matricea lor (notată **msgo**) procedând astfel:

$$\begin{aligned} \text{msgo} &= \{\text{Coefficient}[\text{sgo}, x_2], \\ &\quad \text{Coefficient}[\text{sgo}, x_4], \text{Coefficient}[\text{sgo}, x_5]\} \\ &= \{\{2, 1, 0, 0, 0\}, \{-2, 0, 1, 1, 0\}, \{-1, 0, -1, 0, 1\}\} \end{aligned}$$

Ea are rangul

`MatrixRank[msgo]`

3

Întrucât orice soluție a sistemului omogen dat este combinație liniară de aceste soluții particulare, rezultă că ele generează întregul nucleu. Rangul matricei lor fiind egal cu numărul lor, ei sunt liniar independenți, deci alcătuiesc o bază pentru $\mathbf{N}(\mathbf{A})$.

Concluzii:

- 1) Nucleul lui \mathbf{A} , matrice reală $m \times n$, este un subspațiu al lui \mathbb{R}^n având

$$\dim \mathbf{N}(\mathbf{A}) = \text{numărul parametrilor} = n - \text{rang}(\mathbf{A}).$$

- 2) O bază a sa se poate obține fie rezolvând sistemul $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ și scriind soluția generală sub forma descompusă de mai sus, fie aplicând “**M**”-comanda `NullSpace[A]`; în cazul matricei date,

$$\text{NullSpace} \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\{ \{-1, 0, -1, 0, 1\}, \{-2, 0, 1, 1, 0\}, \{2, 1, 0, 0, 0\} \}$$

- 3) Soluția generală a unui sistem liniar și neomogen compatibil $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, unde \mathbf{A} este o matrice $m \times n$ al cărei subspațiu $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ nu se reduce la vectorul nul, este alcătuită dintr-o infinitate de vectori depinzând de $n - \text{rang}(\mathbf{A})$ parametri. Ea se descompune

în suma dintre o soluție particulară neomogenă și soluția generală omogenă. Prima dintre acestea două poate fi obținută cu “**M**”-comanda `LinearSolve[A, b]`, iar a doua - fie utilizând metoda descrisă în acest paragraf, fie “**M**”-comanda `NullSpace[A]`.

Exemplu

În cazul matricei de mai sus,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

soluția generală pentru sistemul neomogen cu termen liber

$$\mathbf{b} = (4, -7, 11),$$

este

$$\begin{aligned} \text{solpart} &= \text{LinearSolve}[A, \mathbf{b}] \\ &= \{-5, 0, 3, 0, 0\} \end{aligned}$$

iar soluția generală neomogenă este

$$\begin{aligned} &\text{solpart} + \text{sgo} \\ &= \{-5 + 2x_2 - 2x_4 - x_5, x_2, 3 + x_4 - x_5, x_4, x_5\} \end{aligned}$$

Aici,

$$\text{sgo} = \{x_2, x_4, x_5\}.\text{NullSpace}[A]$$

Observație:

Dacă nu știm care sunt necunoscutele-parametri, putem utiliza orice vector având lungimea: număr de necunoscute (sau de coloane) – $\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim \mathbf{N}(\mathbf{A})$.

6.2 Incluziunea și egalitatea de subspații

Subspațiile lui \mathbb{R}^n sunt mulțimi infinite de vectori. Pentru a verifica incluziunea între două astfel de mulțimi² trebuie să plecăm de la două sisteme finite de generatori ale lor, iar apoi să arătăm că generatorii spațiului mai mic sunt combinații liniare ale generatorilor celui mai mare. În felul acesta, fiecare combinație liniară cu generatorii spațiului mai mic va fi și una cu generatorii spațiului mai mare, iar incluziunea devine evidentă.

Exemplu

Pentru a verifica incluziunea $\mathbf{Im}(\mathbf{A.B}) \xrightarrow{\subset} \mathbf{Im}(\mathbf{A})$, unde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

trebuie să plecăm de la sisteme de generatori pentru $\mathbf{Im}(\mathbf{A.B})$ și $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$.

²În acest caz, incluziunea este o relație referitoare la subspații și se va nota cu simbolul $\xrightarrow{\subset}$.

Acestea sunt coloanele celor două matrice. Întrucât

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

rămâne de arătat că fiecare din cele două coloane ale lui $A.B$ este combinație liniară a coloanelor lui A ; deci, conform criteriului din 6.1.1, că sistemele

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sunt compatibile. Verificați acest fapt!

Observație:

“**M**”-comanda `LinearSolve[A, B]` produce, în caz de compatibilitate, o soluție matriceală X a ecuației $A.X = B$.

Exemplu

$$X = \text{LinearSolve} \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]; X // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

În caz de incompatibilitate apare un mesaj corespunzător:

$$\text{LinearSolve} \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right];$$

LinearSolve::nosol: Linear equation encountered that has no solution. >>

Combinând această comandă cu cea care testează dacă rezultatul este o matrice, `MatrixQ[X]`, obținem un test de verificare a compatibilității sistemului $A \cdot X = B$. Acest test verifică însăși condiția de exprimare a coloanelor lui B drept combinații liniare ale coloanelor lui A , adică testează incluziunea de subspații $\text{Im}(B) \overset{\vec{C}}{\subset} \text{Im}(A)$:

```
SubspatiuQ[B_;/;MatrixQ[B],A_;/;MatrixQ[A]] :=
MatrixQ[LinearSolve[A,B]]
```


$$\text{SubspatiuQ} \left[\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] \right]$$

True

$$\text{SubspatiuQ} \left[\left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \right]$$

LinearSolve::nosol: Linear equation encountered that has no solution. >>

False

Consecință:

Cuplând cele două incluziuni de subspații: $\mathbf{Im}(B) \vec{\subset} \mathbf{Im}(A)$ și $\mathbf{Im}(A) \vec{\subset}$

Im(B) obținem condiția de egalitate a două subspații:

$$\text{SubspatiuQ} \left[\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] \&\& \right. \\ \left. \text{SubspatiuQ} \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \right]$$

True

6.3 Suma și intersecția a două subspații

Dacă S_1 și S_2 sunt subspații în \mathbb{R}^n , cu ele putem construi alte două subspații și anume:

- 1) *Suma* $S_1 + S_2$ alcătuită din totalitatea sumelor $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, cu $\mathbf{x}_1 \in S_1$ și $\mathbf{x}_2 \in S_2$.
- 2) *Intersecția* $S_1 \cap S_2$ alcătuită din toți vectorii lui \mathbb{R}^n aflați în ambele subspații.

Observații:

- 1) Cititorul va putea verifica în amândouă cazurile îndeplinirea condiției de subspațiu și anume că, pentru oricare doi vectori \mathbf{x} și \mathbf{y} aparținând mulțimii astfel definite și orice doi scalari α și β , combinația liniară $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ se găsește și ea în aceeași mulțime.
- 2) De asemenea, să observăm că atât suma cât și intersecția de subspații sunt *nevide*, deoarece conțin vectorul nul din \mathbb{R}^n . Explicați!
- 3) Dacă dispunem de sisteme de generatori pentru fiecare din cele două subspații, atunci reuniunea acestor sisteme va constitui un sistem de generatori ai subspațiului sumă. În cazul intersecției, problema nu se rezolvă la fel de simplu.

Exemplu

Pentru a urmări concret o metodă de construire a bazelor în suma și intersecția subspațiilor V și W din \mathbb{R}^n , presupunem că generatorii lor sunt respectiv coloanele matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pasul I. Determinăm baze în $\mathbf{Im}(A)$ și $\mathbf{Im}(B)$, conform metodei explicate în partea finală a §6.1.2, și obținem coloanele matricelor

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pasul II. Reunim cele două baze într-o singură matrice, pe care o aducem la forma canonică pe linii

$$F = \text{Join}[A_1, B, 2]; \text{RowReduce}[F] // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasul III. Coloanele lui F corespunzătoare pivotilor din forma canonică (prima, a doua și a cincea) determină baza în $\mathbf{Im}(A) + \mathbf{Im}(B)$. Celelalte două coloane din F (a treia și a patra) sunt combinații liniare ale primelor două coloane, așa cum rezultă din forma canonică. Mai precis, au loc relațiile

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{f}_4 = \frac{5}{3}\mathbf{f}_2 - \frac{4}{3}\mathbf{f}_1.$$

Observăm că membrii stângi sunt vectori din baza lui S_2 , în timp ce în membrii dreپți sunt vectori din baza lui S_1 . Am obținut așadar doi vectori liniar independenți aflați în intersecția celor două subspații. Ei

alcătuiesc baza acestui subspațiu³.

Observații (continuare):

- 4) Utilizând noțiuni de geometrie din capitolul 8 vom putea obține mai ușor și direct bazele sumei și intersecției celor două subspații (conform exercițiului 9).
- 5) Definițiile sumei și intersecției a două subspații se pot extinde la mai multe subspații. La fel, se pot generaliza și algoritmi de determinare a bazelor lor.
- 6) Un caz important apare atunci când intersecția celor două subspații se reduce la vectorul nul. Într-o astfel de situație, fiecare vector $\mathbf{x} \in V+W$ are o singură descompunere $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, cu $\mathbf{v} \in V$ și $\mathbf{w} \in W$. Suma celor două subspații se numește în acest caz *directă*. Tot în acest caz, atunci când $\dim(V+W) = n$, rezultă că fiecare vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se descompune în mod unic în suma $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

³Explicația acestei concluzii rezidă într-o teoremă care afirmă că $\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V \cap W)$. Întrucât suma din membrul stâng al relației este în cazul de față 5, iar $\dim(V+W) = 3$, rezultă că $\dim(V \cap W) = 2$, cei doi vectori linear independenți din intersecție fiind chiar o bază a sa.

* * *

Dependență și independență liniară în spațiul vectorial \mathbb{R}^n

Vom trece la o generalizare a noțiunilor fundamentale pe care le-am exemplificat în paginile anterioare. În cele ce urmează, vectorii vor fi, după caz, vectori-linie sau vectori-coloană (însă nu simultan).

Definiția 1

O relație de *dependență liniară* între vectorii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ din \mathbb{R}^n este o relație de forma $\sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, în care *nu toți* coeficienții $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sunt nuli.

Definiția 2

Când, dimpotrivă, între vectorii \mathbf{v}_i nu există nicio relație de dependență liniară, ei se numesc *liniar independenți*.

Observații:

- 1) În cazul vectorilor-linie ai matricei $\mathbf{A}_{m \times n}$, acest din urmă fapt poate fi exprimat în mod concret prin condiția: pentru orice $\mathbf{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ implică $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. În cazul coloanelor, condiția este: pentru orice $\mathbf{x} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ implică $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2) O altă formă de exprimare se bazează pe rangul matricei $\mathbf{A}_{m \times n}$ și anume: condiția $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$, atunci când \mathbf{v}_i sunt liniile ei, respectiv condiția $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, atunci când \mathbf{v}_i sunt coloane. Cele două forme de exprimare se traduc în “**M**” prin comenzile `MatrixRank[A] == m` și respectiv `MatrixRank[A] == n`.
- 3) În cazul dependenței liniare, găsirea coeficienților α_i din relația de definiție presupune rezolvarea unui sistem linear și omogen. Întrucât, dacă există o astfel de relație, există o infinitate de multiple ale ei, problema se rezolvă complet determinând numărul maxim de relații de dependență liniară independente între ele. Un număr de p relații de dependență liniară între liniile lui \mathbf{A} se pot exprima sub forma unei singure relații $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{0}$, unde \mathbf{X} este o matrice $p \times m$ ce are pe fiecare linie coeficienții uneia din cele p relații. Spunem că cele p relații de forma $\sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, p$ sunt (liniar) independente dacă $\text{rang}(\mathbf{X}) = p$.
- 4) În cazul particular când $p = 0$, deci liniile sunt linear independente, rezultă $\text{rang}(\mathbf{A}) = m \geq n$. Deoarece $\mathbf{Im}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^m$ și dimensiunile celor două spații coincid, respectivele spații coincid la rândul lor. În virtutea criteriului din §6.1.1, observația 5, pentru orice $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sistemul $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ are soluție. Notând cu $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$ soluțiile sale corespunzătoare coloanelor $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{b} = \mathbf{e}_m$ ale matricei-unitate \mathbf{I}_m , $n \times m$ matricea \mathbf{C} avându-le drept coloane

va verifica relația $AC = I_m$ (exercițiul 7.2). Din acest motiv, C se numește *inversă la dreapta* pentru A .

5) Pentru orice matrice $A_{m \times n}$ se poate prezenta una și numai una din situațiile de mai jos:

a) $\text{rang}(A) = m = n$

b) $\text{rang}(A) = m > n$

c) $\text{rang}(A) = n > m$

d) $\text{rang}(A) < m, \text{rang}(A) < n$.

Corespunzător fiecăreia dintre ele au loc următoarele proprietăți:

a) Liniile și coloanele sunt liniar independente și matricea (pătrată) are o singură inversă (bilaterală).

b) Liniile sunt liniar independente, iar între coloanele sale se pot determina $n - \text{rang}(A)$ relații independente de dependență liniară. Matricea are o infinitate de inverse la dreapta.

c) Coloanele sunt liniar independente, iar între liniile sale se pot determina $m - \text{rang}(A)$ relații independente de dependență liniară. Matricea are o infinitate de inverse la stânga¹.

d) Între liniile/coloanele sale se pot determina $m - \text{rang}(A)$, respectiv $n - \text{rang}(A)$ relații independente de dependență liniară.

Găsirea unui sistem independent maximal de relații de dependență liniară între liniile/coloanele unei matrice A date, precum și a unei inverse (dacă există) se poate realiza în “**M**” folosind următoarele comenzi:

¹O matrice B este inversă la stânga pentru A dacă $BA = I_n$.

DepLin pentru un sistem independent maximal de dependențe liniare

```

DepLin[A_/; MatrixQ[A]] :=
Block[{m = Dimensions[A][[1]], n = Dimensions[A][[2]],
r = MatrixRank[A], m1 = m - r, n1 = n - r,
AT = Transpose[A], NA = NullSpace[A], NAT = NullSpace[AT]},
{veclin = Table[vi, {i, 1, m}], veccol = Table[wi, {i, 1, n}],
Which[
(m1 == 0 && n1 == 0),
Print["Linii si coloane linear independente (matrice inversabila)"],
(m1 > 0 && n1 > 0),
{Print["Relatiile de dependenta liniara intre liniile matricei sunt:"],
For[i = 1, i ≤ m1, i ++, Print[NAT[[i]].veclin, "=0"]]} &&
{Print["Relatiile de dependenta liniara intre coloanele matricei sunt:"],
For[i = 1, i ≤ n1, i ++, Print[NA[[i]].veccol, "=0"]]},
(m1 > 0 && n1 == 0),
{Print["Coloane linear independente (matrice inversabila la stanga)"],
Print["Relatiile de dependenta liniara intre liniile matricei sunt:"],
For[i = 1, i ≤ m1, i ++, Print[NAT[[i]].veclin, "=0"]]},
(m1 == 0 && n1 > 0),
{Print["Linii linear independente (matrice inversabila la dreapta)"],
Print["Relatiile de dependenta liniara intre coloanele matricei sunt:"],
For[i = 1, i ≤ n1, i ++, Print[NA[[i]].veccol, "=0"]]}];]

```

InvDr pentru o inversă la dreapta

```

InvDr[A_/; MatrixQ[A]] :=
Block[{Xx = Array[x, Dimensions[Transpose[A]], Y},
If[MatrixRank[A] == Dimensions[A][[1]], Y = Xx/.Flatten[

```

```

FindInstance[A.Xx == IdentityMatrix[Dimensions[A][[1]]],
Flatten[Xx]]; Y//MatrixForm,
Print["Nu exista inversa la dreapta"]]]]

```

InvSt pentru o inversă la stânga

```

InvSt[A_./; MatrixQ[A]] :=
Block[{Xx = Array[x, Dimensions[Transpose[A]]], Y},
If[MatrixRank[A] == Dimensions[A][[2]], Y = Xx/.Flatten[
FindInstance[Xx.A == IdentityMatrix[Dimensions[A][[2]]],
Flatten[Xx]]; Y//MatrixForm,
Print["Nu exista inversa la stanga"]]]]

```

Exemple

$$\text{DepLin}[A = \{\{1, -1, 2, 1\}\}]$$

Linii linear independente (matrice inversabila la dreapta)

Relatiile de dependenta liniara intre coloanele matricei sunt :

$$-w_1 + w_4 = 0$$

$$-2w_1 + w_3 = 0$$

$$w_1 + w_2 = 0$$

InvDr[A]

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

InvSt[A]

Nu exista inversa la stanga

$$\text{DepLin } A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Coloane liniar independente (matrice inversabila la stanga)

Relatiile de dependenta liniara intre liniile matricei sunt :

$$v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

InvDr[A]

Nu exista inversa la dreapta

InvSt[A]

$$\begin{pmatrix} 0 & 4/5 & -3/5 & -8/5 \\ 0 & 1/5 & -2/5 & -2/5 \\ 0 & -1/5 & 2/5 & 7/5 \end{pmatrix}$$

$$\text{DepLin } A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Relatiile de dependenta liniara intre liniile matricei sunt :

$$-v_1 - 2v_2 + v_3 + 5v_4 = 0$$

Relatiile de dependenta liniara intre coloanele matricei sunt :

$$w_1 - w_2 + w_3 = 0$$

InvDr[A]

Nu exista inversa la dreapta

InvSt[A]

Nu exista inversa la stanga

$$\text{DepLin} \left[A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Linii și coloane liniar independente (matrice inversabilă)

$$\text{InvDr}[A] = \begin{pmatrix} -11/30 & 1/30 & 9/10 \\ 4/15 & 1/15 & -1/5 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{InvSt}[A] = \begin{pmatrix} -11/30 & 1/30 & 9/10 \\ 4/15 & 1/15 & -1/5 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Definiția 3

Vectorii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ din spațiul vectorial V alcătuiesc un *sistem de generatori* pentru V dacă orice vector din V este o combinație liniară a lor cu scalarii lui V .

Definiția 4

Vectorii $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ din spațiul vectorial V alcătuiesc o *bază* pentru V dacă:

- a) Sunt liniar independenți.
- b) Alcătuiesc un sistem de generatori pentru V .

Observații (continuare):

- 6) Orice spațiu vectorial diferit de vectorul nul are o infinitate de baze.
- 7) Există spații vectoriale având baze cu o infinitate de vectori. Ne vom ocupa doar de spațiile cu baze finite, spații care se numesc *finit-dimensionale*.
- 8) Toate bazele unui spațiu finit-dimensional V au același număr de vectori. Acest număr se numește *dimensiunea spațiului V* și se notează $\dim(V)$.
- 9) Pentru orice două baze ale lui V : $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ și $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ există o matrice $m \times m$ nesingulară S astfel încât

$$(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)^T = S \cdot (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)^T$$

Ea se numește *matricea de schimbare a bazei*.

- 10) Fiecărui vector $\mathbf{v} \in V$ i se asociază în baza $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ un unic sistem de numere (x_1, \dots, x_m) - *coordonatele sale în această bază*, astfel încât $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{v}_i$.
- 11) Dacă aceluiși vector \mathbf{v} i se asociază într-o altă bază $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ coordonatele (y_1, \dots, y_m) , atunci relația dintre coordonatele (x_1, \dots, x_m) și coordonatele (y_1, \dots, y_m) se face prin intermediul matricei de schimbare a bazei: $\mathbf{x} = S \cdot \mathbf{y}$

* * *

8.1 Lungimi și unghiuri

Geometria vectorială în \mathbb{R}^n este o generalizare a celei din spațiul tridimensional, în care distanțele și lungimile se măsoară cu teorema lui Pitagora, unghiurile se măsoară cu teorema cosinusului din trigonometrie (sau teorema lui Pitagora generalizată) etc.

Lungimea (norma) vectorului $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ este dată de formula

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Unghiul dintre vectorii $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ și $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ se poate obține prin intermediul funcției

$$\cos(\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Observații:

- 1) Expresia $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, care va apare în multe calcule, se numește *produs scalar* al vectorilor \mathbf{x} și \mathbf{y} și este notată $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
- 2) Convenind ca vectorii lui \mathbb{R}^n să fie vectori-coloană, produsul lor scalar va putea fi calculat și cu formula

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

În “**M**”, produsul scalar a doi vectori-linie, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, poate fi calculat astfel:

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \cdot \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$$

$$\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 + \mathbf{x}_3 \mathbf{y}_3$$

- 3) Rezultă imediat cele patru proprietăți importante ale produsului scalar:

a) *Comutativitatea:* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$

b) *Omogenitatea:* $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

c) *Aditivitatea:* $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$

d) *Pozitivitatea:* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

pentru orice vectori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ și $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.2 Ortogonalitatea vectorilor și subspațiilor

Relația de ortogonalitate între vectorii \mathbf{x} și \mathbf{y} se notează $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ și se definește prin condiția $\cos(\widehat{\mathbf{x}\mathbf{y}}) = 0$, de unde rezultă

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Exemplu

Liniile oricărei matrice sunt ortogonale pe toți vectorii aflați în nucleul său. Să verificăm acest fapt în cazul primei linii

$$\mathbf{a}^1 = (1, -2, 3, -1, 4)$$

a matricei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(vezi §6.1.2). Fiind vorba de o infinitate de relații de ortogonalitate ale liniei \mathbf{a}^1 cu fiecare vector $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$, reducem problema la un număr finit de verificări. Vom folosi o bază a subspațiului nucleu pe care am găsit-o în §6.1.3.

$$\{\{2, 1, 0, 0, 0\}, \{-2, 0, 1, 1, 0\}, \{-1, 0, -1, 0, 1\}\}$$

Cele trei produse scalare $\langle \mathbf{x}^i, \mathbf{a}^1 \rangle$ ($i = 1, 2, 3$) sunt nule. Verificați acest fapt! Fiecare vector $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$ este o combinație liniară a celor trei

vectori \mathbf{x}^1 , \mathbf{x}^2 și \mathbf{x}^3 ai bazei:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{x}^i$$

Să calculăm produsul scalar

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}^1 \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{x}^i, \mathbf{a}^1 \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \alpha_i \mathbf{x}^i, \mathbf{a}^1 \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \langle \mathbf{x}^i, \mathbf{a}^1 \rangle = \sum_{i=1}^3 \alpha_i 0 = 0. \end{aligned}$$

În acest calcul am utilizat pe rând proprietățile de aditivitate și omogenitate ale produsului scalar.

Observații (continuare):

- 4) Liniile \mathbf{a}^i ale matricei \mathbf{A} sunt generatorii subspațiului $\mathbf{Im}(\mathbf{A}^T)$, deci pentru orice vector $\mathbf{v} \in \mathbf{Im}(\mathbf{A}^T)$ există scalarii β_i astfel încât $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{a}^i$. Întrucât pentru orice vector $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{a}^i, \mathbf{x} \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \beta_i \mathbf{a}^i, \mathbf{x} \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^3 \beta_i \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^3 \beta_i 0 = 0, \end{aligned}$$

concluzia va fi că, pentru orice vectori $\mathbf{v} \in \mathbf{Im}(\mathbf{A}^T)$ și $\mathbf{x} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$, este valabilă proprietatea $\mathbf{v} \perp \mathbf{x}$.

Definiția 1

Două subspații S_1 și S_2 ale lui \mathbb{R}^n se numesc *ortogonale* dacă pentru

orice pereche de vectori $\mathbf{x}_1 \in S_1$ și $\mathbf{x}_2 \in S_2$ are loc relația $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$, adică fiecare vector din S_1 este ortogonal pe fiecare vector din S_2 . Pentru a simboliza ortogonalitatea a două subspații se folosește notația $S_1 \perp S_2$.

Exemplu

În spațiul tridimensional \mathbb{R}^3 , vectorii $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ aflați în relația $\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = 0$ cu vectorul fixat și nenul $\mathbf{n} = (a, b, c)$ alcătuiesc un *plan de vectori* - subspațiu ortogonal pe dreapta de vectori $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : \mathbf{x} = \alpha \mathbf{n}\}$. În geometria analitică, aceasta se exprimă prin relația $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, ce definește ecuația planului care trece prin origine și este perpendicular pe \mathbf{n} . Relația vectorială $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ parametru), echivalentă cu relațiile scalare $x_1 = \alpha a$, $x_2 = \alpha b$ și $x_3 = \alpha c$, definește normala respectivului plan. Sub formă neparametrică, relațiile anterioare se scriu $x_1/a = x_2/b = x_3/c$.

Observații (continuare):

- 5) Să observăm că al doilea exemplu este un caz particular al primului și că, în ambele, relația de ortogonalitate dintre subspații - $\mathbf{Im}(\mathbf{A}^T)$ și $\mathbf{N}(\mathbf{A})$, respectiv planul și normala sa - poate fi completată cu o informație suplimentară. Ne referim mai întâi la al doilea exemplu, precizând că planul conține *toți* vectorii perpendiculari pe dreaptă și, reciproc, dreapta conține *toți* vectorii perpendiculari pe plan. (Este vorba de vectori ce pleacă din origine). Similar, nucleul matricei \mathbf{A} conține *toate* soluțiile sistemului omogen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, deci *toți* vectorii \mathbf{x} ortogonali pe *toate* liniile matricei \mathbf{A} . Și în acest caz, deși mai greu de sesizat, reciproca este totuși adevărată.

Definiția 2

Se numește *complement ortogonal* al subspațiului S din \mathbb{R}^n submulțimea $S' \subset \mathbb{R}^n$ alcătuită din *toți* vectorii $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ pentru care $\forall \mathbf{x} \in S : \mathbf{x} \perp \mathbf{v}$.

Observații (continuare):

- 6) Complementul ortogonal se poate defini exact ca mai sus și când S este o mulțime nevidă de vectori din \mathbb{R}^n , nu neapărat subspațiu. Dar el este în toate cazurile un subspațiu, care se notează¹, de obicei, cu S^\perp . Astfel, conform celor discutate anterior,

$$\mathbf{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathbf{Im}(\mathbf{A}^T), \quad \mathbf{Im}(\mathbf{A}^T)^\perp = \mathbf{N}(\mathbf{A}).$$

Exemplu

Pentru a determina în \mathbb{R}^4 complementul ortogonal al mulțimii formate din *versorii*² axelor Ox_1 și Ox_2 , $(1, 0, 0, 0)$, respectiv $(0, 1, 0, 0)$, calculăm

$$\begin{aligned} \text{NullSpace}[\{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, 1, 0, 0\}\}] \\ \{\{0, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 1, 0\}\} \end{aligned}$$

Am obținut așadar subspațiul generat de versorii celorlalte două axe, Ox_3 și Ox_4 .

Observații (continuare):

- 7) Conform celor afirmate anterior, subspațiul generat de Ox_1 și Ox_2

¹În acest caz, S^\perp este complementul ortogonal al subspațiului generat de vectorii lui S .

²Se numește *versor* al direcției determinate de un vector nenul \mathbf{v} , vectorul $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$.

este suma subspațiilor S_1 , reprezentat de dreapta vectorială Ox_1 , și S_2 , reprezentat de dreapta vectorială Ox_2 (vezi începutul §6.3).

8.3 Proiecții ortogonale

În geometria spațiului \mathbb{R}^n , noțiunea de proiecție (ortogonală) este utilizată în două variante pe care le vom analiza în continuare.

a) Proiecția vectorului \mathbf{x} pe un vector (fixat) nenul \mathbf{v} se obține amplificând versorul $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ cu produsul dintre lungimea lui \mathbf{x} și cosinusul unghiului format de \mathbf{x} cu \mathbf{v} . Rezultă astfel vectorul

$$\vec{\text{pr}}_{\mathbf{v}} \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v}.$$

Lungimea cu semn ³a lui este

$$\text{pr}_{\mathbf{v}} \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|}$$

și se numește *proiecția scalară* a lui \mathbf{x} pe \mathbf{v} . Între cele două proiecții există relația

$$\vec{\text{pr}}_{\mathbf{v}} \mathbf{x} = (\text{pr}_{\mathbf{v}} \mathbf{x}) \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

În “**M**”, funcția `Projection[u, v]` calculează proiecția vectorului \mathbf{u} pe vectorul \mathbf{v} după prima formulă. De exemplu,

$$\text{Projection}[\{1, 2\}, \{1, 1\}]$$

³Semnul este – când unghiul dintre cei doi vectori este mai mare decât $\frac{\pi}{2}$

$$\left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

Ea poate fi extinsă și pentru alte produse scalare definite în prealabil. De exemplu, dacă produsul scalar al vectorilor planului este definit prin

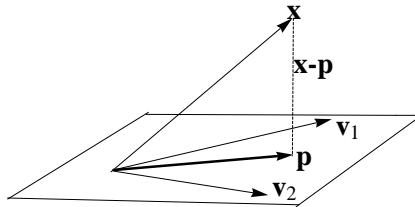
$$\text{ps}[\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}, \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}] := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$$

putem calcula noua “proiecție” a vectorului $(1, 2)$ pe vectorul $(1, 1)$ cu formula

$$\text{Projection}[\{1, 2\}, \{1, 1\}, \text{ps}]$$

$$\left\{ \frac{10}{7}, \frac{10}{7} \right\}$$

b) Proiecția vectorilor din \mathbb{R}^n pe un vector nenul fixat este un caz particular al proiecției pe un subspațiu $S \subset \mathbb{R}^n$. De exemplu, proiecția vectorilor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ pe planul generat de vectorii fixați și liniar independenți \mathbf{v}_1 și \mathbf{v}_2 din \mathbb{R}^3 - vezi figura de mai jos.



Întrucât proiecția ortogonală \mathbf{p} a lui \mathbf{x} pe plan verifică o relație de ortogonalitate și anume, perpendicularitatea lui $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ pe plan, rezultă că $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ va fi perpendicular pe cei doi generatori ai planului, deci $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$ și $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$. Acestea sunt două ecuații liniare din care putem obține coordonatele α_1 și α_2 ale lui $\mathbf{p} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ în baza

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ a planului. Utilizând proprietățile produsului scalar, cele două ecuații pot fi aduse la forma

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle \alpha_1 + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \alpha_2 &= \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \alpha_1 + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle \alpha_2 &= \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{x} \rangle\end{aligned}$$

Perfect analog, procedeul se poate extinde la proiecția vectorilor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pe un subspațiu $S \subset \mathbb{R}^n$ având baza $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ cunoscută. Dezvoltând ecuațiile $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x} - \mathbf{p} \rangle = 0$, $i = 1, \dots, m$ ce ne furnizează coordonatele α_i ale lui \mathbf{b} în baza \mathbf{v}_i , obținem un sistem $m \times m$ având forma similară celui anterior:

$$\sum_{j=1}^m \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle \alpha_j = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{x} \rangle, \quad i = 1, \dots, m.$$

Rezolvarea acestui sistem conduce la o problemă importantă. Să observăm de la început că matricea sa (numită *matrice Gram* a vectorilor $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$), având elementele $g_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$, este pătrată și depinde exclusiv de alegerea vectorilor bazei din S și de produsul scalar⁴. Cu cât va fi mai simplă această matrice, cu atât mai ușor obținem proiecția \mathbf{p} . Întrucât cea mai simplă matrice $m \times m$ este I_m , ar fi de dorit ca baza \mathbf{v}_i să verifice condițiile $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, pentru $i \neq j$ și $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 1$, pentru $i = j$.

8.4 Baze ortonormate

Definiția 3

Baza $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ a subspațiului $S \subset \mathbb{R}^n$ se numește *ortonormată* în

⁴Produsul scalar al vectorilor din \mathbb{R}^n definit în observația 1 este doar una din variantele posibile pentru a face geometrie în acest spațiu. În principiu, orice funcție definită pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ și având proprietățile (a) - (d) poate fi un produs scalar.

raport cu produsul scalar $\langle *, * \rangle$ dacă $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, pentru $i \neq j$ și $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 1$, pentru $i = j$.

Orice bază $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ a subspațiului S este transformabilă într-o bază ortonormată $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$. Procedeeul - numit *Gram-Schmidt* - prin care realizăm această transformare, se poate desfășura în două etape. Prima etapă constă în transformarea bazei inițiale \mathbf{v}_i într-o bază alcătuită din vectori \mathbf{w}_i reciproc ortogonali. Cea de a doua etapă presupune doar împărțirea fiecărui vector \mathbf{w}_i la lungimea sa: $\mathbf{u}_i = \mathbf{w}_i / \|\mathbf{w}_i\|$. Rămâne să descriem cei $m - 1$ pași ai primei etape, adică procedeul Gram-Schmidt propriu-zis.

Renotând cu \mathbf{w}_1 vectorul \mathbf{v}_1 , determinăm vectorul \mathbf{w}_2 ca diferență între \mathbf{v}_2 și proiecția sa pe \mathbf{w}_1 . Procedeeul fiind inductiv, pentru a construi vectorul \mathbf{w}_i presupunem că au fost deja generați $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{i-1}$. Atunci \mathbf{w}_i se obține scăzând din \mathbf{v}_i proiecțiile sale pe toți vectorii \mathbf{w}_j anterior construiți.

Exemplu

Transformarea bazei

$$\{\{1, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}\}$$

într-o bază ortonormată a spațiului \mathbb{R}^3 .

Etapa I:

Pasul 1: Notăm

$$\mathbf{w}_1 = \{1, 1, 0\}$$

Pasul 2:

$$\mathbf{w}_2 = \{0, 1, 1\} - \text{Projection}[\{0, 1, 1\}, \mathbf{w}_1]$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

Pasul 3:

$$\mathbf{w}_3 = \{1, 0, 1\} - \text{Projection}[\{1, 0, 1\}, \mathbf{w}_1]$$

$$- \text{Projection}[\{1, 0, 1\}, \mathbf{w}_2]$$

$$\left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Etapa a II-a:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1 / \text{Norm}[\mathbf{w}_1]$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2 / \text{Norm}[\mathbf{w}_2]$$

$$\left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_3 / \text{Norm}[\mathbf{w}_3]$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

În **“M”**, comanda `Orthogonalize[B]`, unde `B` este baza ce urmează a fi ortonormată, conduce la același rezultat:

$$\text{Orthogonalize}[B = \{\{1, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 0, 1\}\}]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \right\}$$

Trebuie reținut faptul că `Orthogonalize[B]` ortonormează *liniile* matricei `B`.

Descompunerea QR a unei matrice

Procedeeul Gram-Schmidt de ortonormare a unui sistem liniar independent de m vectori din \mathbb{R}^n are o aplicație importantă și anume: descompunerea unei matrice $n \times m$ având acești vectori drept coloane în produsul dintre matricea $Q_{n \times m} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m]$, formată cu vectorii bazei ortonormate drept coloane, și o matrice $m \times m$ superior triunghiulară având pe diagonală numere pozitive (normele vectorilor \mathbf{w}_i obținuți după prima etapă). În “**M**”, comanda `QRDecomposition` produce respectiva descompunere:

```
{Q,R} = QRDecomposition[Transpose[B]];
Map[MatrixForm, {Transpose[Q],R}]
```

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{array} \right) \right\}$$

Verificare:

```
Transpose[B] == Transpose[Q].R
```

True

8.5 Matrice ortogonale

Matricea Q din descompunerea QR anterioară

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

are atât liniile cât și coloanele ortonormate, proprietate ce rezultă din egalitățile (pe care cititorul este sfătuit să le verifice):

$$Q \cdot Q^T = I_3, \quad Q^T \cdot Q = I_3.$$

Cele două condiții sunt echivalente între ele pentru orice matrice pătratică reală și, de asemenea, echivalente cu $Q^T = Q^{-1}$. Ele caracterizează o categorie importantă de matrice reale, așa-numitele *matrice ortogonale*. Acestea mai au și alte proprietăți remarcabile, pe care le vom discuta mai jos. Pentru moment însă, prezentăm câteva

Exemple

Folosind oricare din cele două condiții enunțate anterior, prin aplicarea determinantului rezultă

$$\det(Q) \cdot \det(Q^T) = 1,$$

deci

$$\det(Q) = \pm 1.$$

Drept consecință, orice matrice ortogonală 2×2 va fi de forma

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ în cazul } \det(Q) = +1,$$

sau de forma

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \text{ în cazul } \det(Q) = -1,$$

pentru un anumit unghi $\theta \in [0, 2\pi]$. După cum vom arăta mai departe, primul tip de matrice transformă prin înmulțire vectorii-coloană din \mathbb{R}^2 în rotații lor cu unghiul θ în jurul originii. Similar, matricele ortogonale 3×3 având determinant $+1$ rotesc prin înmulțire vectorii spațiului \mathbb{R}^3 . În particular, matricea ortogonală

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

efectuează rotația de unghi θ în jurul axei Ox_3 .

Transformări rigide

Printre proprietățile importante ale transformărilor $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definite prin matrice ortogonale (transformări numite la rândul lor ortogonale) se numără următoarele:

- a) O transformare ortogonală păstrează lungimile vectorilor și distanțele dintre puncte.
- b) O astfel de transformare păstrează unghiurile dintre vectori.

Ambele proprietăți decurg dintr-o caracteristică mai generală:

- c) O transformare ortogonală păstrează produsul scalar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$.

Justificarea este imediată:

$$\langle Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y} \rangle = (Q\mathbf{x})^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle .$$

8.6 Matrice de proiecție

Numim astfel matricele pătrate reale, să le notăm P , având următoarele proprietăți:

- a) *Simetria*: $P^T = P$
- b) *Idempotența*: $P^2 = P$.

Dacă P este o matrice de proiecție $n \times n$, atunci, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} = P\mathbf{x}$ reprezintă proiecția (ortogonală) a lui \mathbf{x} pe subspațiul $\mathbf{Im}(P)$. Întrucât, așa cum am văzut mai sus, în acest caz $\mathbf{x} - \mathbf{p} \perp \mathbf{Im}(P)$, rezultă că $\mathbf{x} - \mathbf{p} \in \mathbf{Im}(P)^\perp = \mathbf{N}(P)$. Astfel încât fiecare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se descompune în mod unic sub forma $\mathbf{x} = \mathbf{p} + (\mathbf{x} - \mathbf{p})$, cei doi termeni din dreapta relației fiind proiecțiile sale ortogonale pe $\mathbf{Im}(P)$ și $\mathbf{N}(P)$. De asemenea, rezultă că \mathbb{R}^n se descompune în *suma directă* dintre cele două subspații ale lui P (conform §6.3, observația 6), fapt notat

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{Im}(P) \oplus \mathbf{N}(P).$$

* * *

9.1 Aplicația liniară

Aplicația liniară este, alături de spațiul vectorial, o noțiune fundamentală a algebrei liniare. Ea transformă vectori ai unui spațiu vectorial în vectori ai aceluiași sau ai altui spațiu vectorial, cu respectarea următoarelor condiții:

- a) să transforme suma vectorilor în suma imaginilor lor;
- b) să transforme produsul dintre un vector și un scalar în produsul imaginii acelu vector cu același scalar.

În notații simbolice, dacă f este aplicația liniară, iar V este domeniul său, atunci orice combinație liniară $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$ a oricăror vectori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ cu orice scalari α_1 și α_2 se transformă prin f în $\alpha_1 f(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{v}_2)$.

Exemple

Câteva exemple sugestive de aplicații liniare vor fi alese dintre transformările vectoriale ale planului \mathbb{R}^2 . Astfel, *orice matrice reală 2×2 definește o transformare liniară a planului \mathbb{R}^2 în el însuși*. Spre exemplu,

- a) *Proiecția* vectorilor pe un subspațiu de dimensiune 1: “dreapta” de vectori \mathbf{x} coliniari cu \mathbf{v} , $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \exists \alpha \in \mathbb{R} : \mathbf{x} = \alpha \mathbf{v}\}$, unde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ este un vector fixat. Notăm această aplicație cu $\vec{\text{pr}}_{\mathbf{v}} \mathbf{x}$. Când $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, obținem proiecția pe axa Ox_1 : $\vec{\text{pr}}_{\mathbf{e}_1} (x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Ceea ce face ca $\vec{\text{pr}}_{\mathbf{e}_1}$ să poată fi asimilată cu matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cu care, amplificând coloana $(x_1, x_2)^T$, obținem același rezultat.

- b) *Simetria* vectorilor în raport cu dreapta-suport a vectorului \mathbf{v} o vom nota $\vec{\text{sim}}_{\mathbf{v}}$. Când $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$, $\vec{\text{sim}}_{\mathbf{e}_1} (x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, această transformare putând fi asimilată cu matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- c) *Rotația* vectorilor în jurul originii cu unghiul θ , notată \mathbf{r}_{θ} , este, așa

cum am menționat în §8.5, reprezentată prin matricea ortogonală

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

- d) *Omotetia* de raport $\alpha > 0$ a vectorilor - notată ω_α - este reprezentată prin matricea "scalară" αI_2 . Ea produce alungirea sau scurtarea vectorilor, după cum $\alpha > 1$ sau $\alpha < 1$.

Rezultat:

Orice aplicație liniară

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

este reprezentată printr-o matrice $m \times n$ notată $M(f)$, ale cărei coloane sunt $f(\mathbf{e}_j)$, unde \mathbf{e}_j sunt versorii axelor de coordonate Ox_j din \mathbb{R}^n .

Exemplu

Dacă $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este definită prin legea

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, x_1 - x_3),$$

atunci matricea $M(f)$ va fi 2×3 , având cele trei coloane

$$f(\{1, 0, 0\}) = \{0, 1\},$$

$$f(\{0, 1, 0\}) = \{1, 0\},$$

$$f(\{0, 0, 1\}) = \{-1, -1\},$$

adică

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verificare:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

În **“M”**, acest algoritm se poate exprima sub forma următoare:

$$M[f, n] := \text{Transpose}[\text{MapThread}[f, \text{Table}[\text{UnitVector}[n, j], \{j, 1, n\}]]]$$

unde **f** este forma “pură” a funcției respective sau un simbol de funcție definit anterior, iar **n** este dimensiunea domeniului său. În cazul de față, această comandă generează matricea

$$M[\{ \#2 - \#3, \#1 - \#3 \} \&, 3] // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.2 Nucleul și imaginea aplicației liniare

Acestea sunt subspații legate de aplicația liniară $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ și anume: *nucleul* $\mathbf{N}(f) \xrightarrow{\subset} \mathbb{R}^n$ și *imaginea* $\mathbf{Im}(f) \xrightarrow{\subset} \mathbb{R}^m$. Iată definițiile lor:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(f) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}, \\ \mathbf{Im}(f) &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\}.\end{aligned}$$

Proprietate

Dacă $A = M(f)$, atunci $\mathbf{N}(f) = \mathbf{N}(A)$ și $\mathbf{Im}(f) = \mathbf{Im}(A)$.

Exemplu (continuare)

În cazul aplicației f din exemplul anterior

$$\mathbf{N}(f) = \mathbf{N} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathbf{Im}(f) = \mathbf{Im} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right),$$

subspații ale căror baze se determină în “**M**” conform §6.1.3 și respectiv §6.1.1.

Injectivitatea și surjectivitatea unei aplicații liniare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Criterii de injectivitate:

f este injectivă $\Leftrightarrow \mathbf{N}(f) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{rang}(M(f)) = n$.

Criterii de surjectivitate:

f este surjectivă $\Leftrightarrow \mathbf{Im}(f) = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \text{rang}(M(f)) = m$.

Exemplu (continuare)

Întrucât

$$\text{rang} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 2,$$

aplicația $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită mai sus este neinjectivă și surjectivă.

9.3 Determinarea unei aplicații liniare

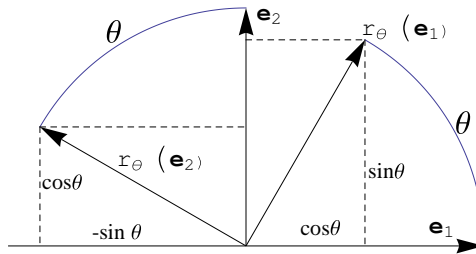
Matricea $M(f)$ determină complet aplicația liniară $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Această matrice are drept coloane imaginile prin f a n vectori particulari liniar independenți, deci a unei baze, din \mathbb{R}^n . Aceste n imagini determină complet imaginile celorlalți vectori din domeniul lui f .

Exemple

- 1) Cunoscând rotații cu unghiul θ ai celor doi versori \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 care definesc axele din planul \mathbb{R}^2 , determinăm matricea de rotație cu unghiul θ , deci rotații tuturor vectorilor din planul \mathbb{R}^2 cu același unghi θ . Deoarece (vezi figura următoare)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\theta(\mathbf{e}_1) &= \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{r}_\theta(\mathbf{e}_2) &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2, \end{aligned}$$

obținem matricea din §9.1, exemplul c).



- 2) Există cazuri în care matricea unei aplicații liniare $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ construită cu versorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 să nu aibă forma cea mai simplă, ci aceasta să fie obținută cu vectorii altei baze din planul \mathbb{R}^2 . Spre exemplu, dacă vectorul $\mathbf{y} = \vec{\text{pr}}_{\mathbf{u}} \mathbf{x}$ reprezintă proiecția ortogonală a lui \mathbf{x} pe versorul $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$, adică vectorul $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$, atunci $M(\vec{\text{pr}}_{\mathbf{u}})$ nu va mai avea forma simplă din §9.1, exemplul a). În acest caz este de preferat o altă bază și anume, cea formată din versorul \mathbf{u} și din versorul obținut prin rotirea lui \mathbf{u} cu unghiul $\pi/2$, adică $\mathbf{v} = \mathbf{r}_{\pi/2}(\mathbf{u}) = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$. Ținând seama de proprietățile proiecției, vom avea relațiile $\vec{\text{pr}}_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \mathbf{u}$ și $\vec{\text{pr}}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, deci, în baza $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, matricea notată $M(\vec{\text{pr}}_{\mathbf{u}}, B)$ va avea aceeași formă simplă cu cea din primul paragraf.

Problema găsirii, pentru o aplicație liniară dată, a unei baze în care matricea sa să aibă o formă cât mai simplă, se pune mai ales pentru aplicațiile liniare având același domeniu și codomeniu, O vom discuta în capitolul 11.

În prealabil, este util să lămurim relația dintre două matrice asociate în două baze diferite *aceleiași* aplicații liniare. În acest scop, reamintim câteva chestiuni legate de noțiunile de bază și coordonatele unui vector, noțiuni expuse în capitolul 7, observațiile (9) - (11).

Având două baze B și B' ale aceluiași spațiu vectorial, orice vector

\mathbf{v} are două seturi de coordonate $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ și $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$, notate uneori $[v]_B$, respectiv $[v]_{B'}$. Relația dintre ele se stabilește prin intermediul unei matrice nesingulare S , numită matricea de schimbare a bazei. Această relație este $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$.

Revenind la matricea $M(f, B)$, asociată aplicației liniare f în baza B , ea stabilește relația dintre coordonatele \mathbf{x} ale vectorului \mathbf{v} în baza B și coordonatele \mathbf{y} ale imaginii sale $f(\mathbf{v})$ în aceeași bază:

$$\mathbf{y} = M(f, B)\mathbf{x}.$$

Similar, pentru baza B' avem

$$\mathbf{y}' = M(f, B')\mathbf{x}'.$$

Înlocuind în prima relație $\mathbf{x} = S\mathbf{x}'$ și $\mathbf{y} = S\mathbf{y}'$, obținem

$$S\mathbf{y}' = M(f, B)S\mathbf{x}',$$

adică

$$\mathbf{y}' = S^{-1}M(f, B)S\mathbf{x}'.$$

Deducem astfel relația care leagă matricele asociate lui f în cele două baze:

$$M(f, B') = S^{-1}M(f, B)S.$$

Aceasta poartă numele de *relație de similaritate*. O aplicație liniară a unui spațiu vectorial în el însuși are diverse matrice asociate în diversele baze ale spațiului. Toate aceste matrice sunt legate între ele prin relații de similaritate¹.

¹Întrucât similaritatea este o relație de echivalență (reflexivă, simetrică și tranzitivă), matricele asociate unei aplicații liniare a unui spațiu vectorial reprezintă o clasă de echivalență (de similaritate).

Metoda celor mai mici pătrate

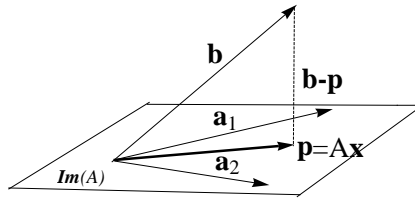
Revenim la problema determinării soluției/soluțiilor unui sistem liniar $m \times n$ notat $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, problemă discutată și în capitolele anterioare. Spre deosebire de acele cazuri, în care ceream în mod expres compatibilitatea sistemului, echivalentă cu apartenența lui \mathbf{b} la subspațiul $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$ - vezi §6.1.1, observația 5 - acum problema va căpăta un conținut mai general. Anume, vom lua în considerare și cazul când $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ nu se găsește în $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$. Pentru acesta, evident, nu vom putea găsi o soluție \mathbf{x} care să conducă la egalitatea vectorială din sistem. În schimb, utilizând geometria spațiului \mathbb{R}^m , vom căuta un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ pentru care distanța $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$ să fie *minimă*¹. Întrucât pătratul normei este o sumă de pătrate (vezi §8.1), acest minim se realizează când suma pătratelor

¹ $\mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ se mai numește *vector rezidual*, iar lungimea lui se mai numește *eroare*. Deoarece sistemul este incompatibil, eroarea nu poate fi făcută zero pentru niciun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dar poate fi minimizată.

este minimă, de unde și numele metodei.

10.1 Metoda celor mai mici pătrate și proiecția pe un subspațiu

Pentru orice $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vectorul $\mathbf{Ax} \in \mathbf{Im}(\mathbf{A})$, iar $\|\mathbf{b} - \mathbf{Ax}\|$ reprezintă distanța dintre vârfurile celor doi vectori. Pentru ca această distanță să fie minimă este necesar și suficient ca vectorul \mathbf{Ax} să reprezinte proiecția ortogonală a lui \mathbf{b} pe $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$: $\mathbf{Ax} = \mathbf{p} = \vec{\text{pr}}_{\mathbf{Im}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ (figura următoare prezintă situația unei matrice $\mathbf{A}_{3 \times 2}$ având coloanele \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 liniar independente).



Rămâne de analizat cum se poate calcula această proiecție. Discuția a fost începută în §8.3 punctul (b), unde am constatat că, pentru a simplifica acest calcul, este util să construim în $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$ o bază ortonormată. Operația se poate realiza dacă dispunem de o bază oarecare, prin aplicarea procedurii Gram-Schmidt de ortogonalizare și normarea vectorilor astfel obținuți. Matricea Gram rezultată fiind \mathbf{I}_n , obținem proiecția

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^r \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^r (\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}) \mathbf{u}_i$$

Aici, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ reprezintă baza ortonormată a subspațiului $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$, $r = \text{rang}(\mathbf{A})$, iar $(\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}) \mathbf{u}_i$ este proiecția vectorului \mathbf{b} pe versorul \mathbf{u}_i .

Transformând sistemul incompatibil dat în sistemul compatibil $A\bar{x} = p$ (am notat diferit cele două necunoscute, x și \bar{x} , deoarece sistemele nu sunt echivalente), soluția acestuia din urmă se numește *pseudosoluția* sistemului dat (sau “soluție” în sensul metodei celor mai mici pătrate).

Exemplu

Sistemul liniar

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_1 + x_2 &= 1, \\x_2 &= 1\end{aligned}$$

este evident incompatibil. Ortonormând coloanele matricei sale, obținem versorii (vezi exemplul din §8.4)

$$u_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}, \quad u_2 = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\}.$$

Proiecțiile termenului liber $b = \{1, 1, 1\}$ pe cei doi versori vor fi (evaluarea se realizează în “**M**”)

$$p_1 = \text{Projection}[\{1, 1, 1\}, u_1]$$

$$\{1, 1, 0\}$$

$$p_2 = \text{Projection}[\{1, 1, 1\}, u_2]$$

$$\left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

astfel încât vectorul-proiecție al lui b pe $\text{Im}(A)$ va fi

$$p = p_1 + p_2$$

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Rezolvând noul sistem compatibil, obținem soluția

$$\bar{\mathbf{x}} = \text{LinearSolve}[\{\{1, 0\}, \{1, 1\}, \{0, 1\}\}, \mathbf{p}]$$

$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Observație importantă:

Descompunerea $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a matricei sistemului considerat ne poate fi de un real folos. Pe de o parte, are loc relația $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, iar pe de altă parte, matricea de proiecție pe subspațiul $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$ capătă o formă simplă: $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ (vezi exercițiul 10.2). Sistemul compatibil asociat celui dat va fi atunci

$$\mathbf{QR}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

și amplificând la stânga cu matricea \mathbf{Q}^T , obținem așa-numitul *sistem al ecuațiilor normale* pentru sistemul considerat:

$$\mathbf{R}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

Exemplu (continuare)

Întrucât matricea sistemului considerat este alcătuită din primele două coloane ale matricei \mathbf{B} din exemplul prezentat în §8.4, rezultă că în descompunerea sa \mathbf{QR} , matricea \mathbf{Q} va avea primele două coloane din primul factor al descompunerii lui \mathbf{B} , iar \mathbf{R} va fi submatricea celui de al doilea factor din descompunerea lui \mathbf{B} aflată la intersecția primelor

două linii cu primele două coloane². Așadar

$$\mathbf{R} = \left\{ \left\{ \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \left\{ 0, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\} \right\}$$
$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\}, \left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right\} \right\}$$

Rezolvăm în acest caz ecuațiile normale

$$\text{LinearSolve}[\mathbf{R}, \mathbf{Q}^T \cdot \{1, 1, 1\}]$$
$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Se observă că am obținut același vector - pseudosoluție a sistemului dat. De notat că rezolvarea acestui sistem este economică (\mathbf{R} fiind o matrice superior triunghiulară, se aplică doar algoritmul *substituții regresive*) și numeric stabilă. Drept urmare, metoda prezentată aici este frecvent utilizată în practică.

În “**M**”, comanda `LeastSquares[A, b]` calculează pseudosoluția sistemului linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Astfel, în cazul discutat,

$$\text{LeastSquares}[\{\{1, 0\}, \{1, 1\}, \{0, 1\}\}, \{1, 1, 1\}]$$
$$\left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

²Aceste fapte sunt consecințe ale regulii de înmulțire a matricelor (vezi exercițiul 7.2).

10.2 Pseudoinversa unei matrice $m \times n$

Determinarea pseudosoluției sistemului $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, cu \mathbf{A} matrice reală $m \times n$, se poate realiza prin metodele descrise doar atunci când este unic determinată. Condiția necesară și suficientă pentru aceasta este ca $r = \text{rang}(\mathbf{A}) = n$. Când $r < n$, sistemul compatibil obținut prin proiecția lui \mathbf{b} pe $\mathbf{Im}(\mathbf{A})$ va avea o infinitate de soluții depinzând de $n - r$ parametri (vezi concluzia (3) din §6.1.3).

Exemplu

Sistemul liniar incompatibil

$$\begin{aligned}x + y &= 1, \\x + y &= 0\end{aligned}$$

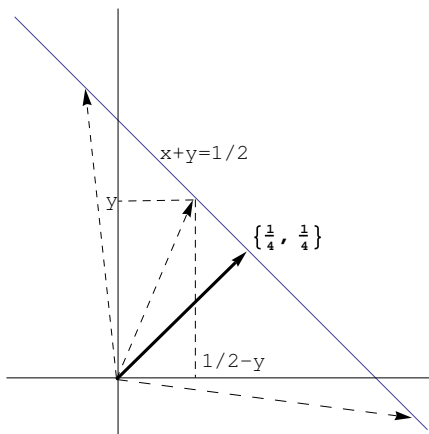
devine, prin proiecția termenului liber $\{1, 0\}$ pe subspațiul dreaptă $\mathbf{Im}(\mathbf{A}) = \{\alpha\{1, 1\} : \alpha \in \mathbb{R}\}$, sistemul

$$\begin{aligned}x + y &= 1/2, \\x + y &= 1/2\end{aligned}$$

(verificați aceasta!). El are ca soluții toți vectorii

$$\left\{ \frac{1}{2} - y, y \right\}, \quad \text{cu } y \in \mathbb{R},$$

ceea ce reprezintă mulțimea vectorilor cu vârfulurile pe o dreaptă (figura de mai jos).



Vectorul de lungime minimă, unic cu aceste proprietăți, numit *pseudosoluția optimă* a sistemului incompatibil considerat este $\{1/4, 1/4\}$. Matricea, notată A^+ , cu care, înmulțind termenul liber $\{1, 0\}$ al sistemului, obținem pseudosoluția optimă a sa, se numește *pseudoinversa* matricei A a sistemului. În “**M**”, această matrice este generată prin comanda `PseudoInverse[A]`. În cazul de față,

$$\text{PseudoInverse}[\{\{1, 1\}, \{1, 1\}\}]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}, \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\} \right\}$$

Verificați prin calcul că produsul ei cu termenul liber al sistemului dat produce pseudosoluția optimă găsită anterior.

10.3 Regresia liniară. Dreapta de regresie

O aplicație frecventă a metodei celor mai mici pătrate constă în găsirea unei funcții liniare $y = mx + n$ (o dreaptă) care să aproximeze, în

sensul acestei metode, relația de dependență dintre două seturi de date experimentale: $\{y_1, \dots, y_p\}$ și $\{x_1, \dots, x_p\}$. Pentru $p > 2$, sistemul neomogen de ecuații liniare

$$mx_i + n = y_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

având necunoscutele m și n , este “supradeterminat” (având mai multe ecuații decât necunoscute). Drept urmare, el este - foarte probabil - incompatibil³. Matricea sistemului are două coloane

$$\mathbf{A} = \text{Transpose}[\{\{x_1, \dots, x_p\}, \{1, \dots, 1\}\}]$$

iar termenul liber este

$$\mathbf{b} = \{y_1, \dots, y_p\}$$

Vom scrie ecuațiile normale într-o formă mai generală, amplificând sistemul cu matricea \mathbf{A}^T ; obținem

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Întrucât coloanele lui \mathbf{A} sunt liniar independente (valorile x_i nu pot fi toate egale între ele), rezultă că acest sistem 2×2 are matricea de rangul 2 și soluția unică

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Componentele \bar{m} și \bar{n} ale acestei soluții determină panta și intersecția cu axa Oy a dreptei de regresie $y = \bar{m}x + \bar{n}$.

³Chiar dacă, de pildă, datele experimentale trebuie să verifice legea liniară a relației spațiu-timp într-o mișcare uniformă, erorile de măsurare, inerente oricărui experiment, conduc la incompatibilitate.

Exemplu

$$A = \text{Transpose}[\{\{1, 2, 4, 5, 7\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}\}]$$

$$b = \{0.5, 2, 3.5, 4, 6\}$$

Rezultă⁴

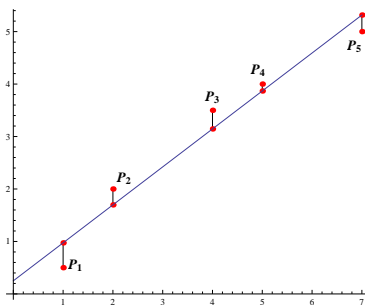
$$(A^T A)^{-1} = \{\{5/114, -1/6\}, \{-1/6, 5/6\}\},$$

$$A^T b = \{73.5, 15\} \text{ și } \bar{x} = \{0.723684, 0.25\}.$$

Am obținut așadar dreapta de regresie

$$y = \bar{x} \cdot \{x, 1\} = 0,25 + 0,723684x$$

Aceste rezultate sunt reprezentate grafic în următoarea figură:



Pe ea pot fi observate cele cinci puncte P_i reprezentând perechile de coordonate $\{x_i, y_i\}$ determinate experimental, toate aflate în exteriorul dreptei de regresie. Se poate arăta (vezi exercițiul 11) că suma “abaterilor cu semn”, + deasupra, – dedesubt, este nulă, în timp ce știm că suma pătratelor acestor abateri (marcate prin segmentele din figură) este mai mică decât pentru orice altă dreaptă din plan.

⁴Dacă nu se specifică altfel, în “**M**”, valorile aproximative se rotunjesc la zecimala a șasea, având deci cinci zecimale exacte.

* * *

11.1 Problema cu valori și vectori proprii

Această problemă se referă la o matrice pătrată $\mathbf{A}_{n \times n}$ cu numere reale sau complexe. Ea cere determinarea vectorilor *nenuli* \mathbf{x} având n componente reale sau complexe, pentru care există un număr real sau complex λ , astfel încât să aibă loc relația

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

sau, echivalent,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

În aceste condiții, λ se numește *valoare proprie* a matricei \mathbf{A} , iar \mathbf{x} - *vector propriu* al lui \mathbf{A} corespunzător valorii proprii λ .

Exemple

1) Pentru a determina valorile proprii ale matricei

$$\mathbf{A} = 1/2\{\{1, 1\}, \{1, 1\}\}$$

plecăm de la condiția existenței unei soluții nenule \mathbf{x} pentru sistemul liniar și omogen

$$(\mathbf{A} - \lambda I_2) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Conform teoriei sistemelor liniare, această condiție este echivalentă cu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I_2) = 0,$$

adică

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Rădăcinile ecuației de mai sus, numită *ecuație caracteristică*, sunt valorile proprii ale matricei \mathbf{A} :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0.$$

Vectorii proprii ai lui \mathbf{A} se obțin pe rând, pentru fiecare din cele două rădăcini, determinând câte o bază în nucleele $\mathbf{N}(\mathbf{A} - \lambda_1 I_2)$, respectiv $\mathbf{N}(\mathbf{A} - \lambda_2 I_2)$. În acest scop, utilizăm **“M”**:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \text{IdentityMatrix}[2]$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\} \right\}$$

$$\text{NullSpace}[\%]$$

$$\{\{1, 1\}\}$$

$$A - \lambda_2 \text{IdentityMatrix}[2]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

$$\text{NullSpace}[\%]$$

$$\{\{-1, 1\}\}$$

Rezultatele astfel obținute pot fi determinate printr-o singură comandă “**M**”:

$$\text{Eigensystem}[A]$$

$$\{\{1, 0\}, \{\{1, 1\}, \{-1, 1\}\}\}$$

Prima pereche din rezultat, $\{1, 0\}$, o reprezintă valorile proprii, iar liniile matricei, $\{\{1, 1\}, \{-1, 1\}\}$, sunt vectorii proprii corespunzători lor.

2)

$$\text{Eigensystem}[\{\{0, -1\}, \{1, 0\}\}]$$

$$\{\{i, -i\}, \{\{i, 1\}, \{-i, 1\}\}\}$$

Constatăm că, deși matricea $\{\{0, -1\}, \{1, 0\}\}$ este reală, valorile/vectorii proprii sunt de tip complex. Acest aspect de natură algebrică are și o interpretare geometrică, ținând cont de faptul că matricele reale 2×2 reprezintă, așa cum am văzut în §9.1, transformări liniare ale vectorilor din plan. Astfel, matricea

$$A = \{\{1/2, 1/2\}, \{1/2, 1/2\}\}$$

din exemplul anterior este, conform celor prezentate în §8.6, si-

metrică și idempotentă (verificați!), deci o matrice de proiecție. Calculând vectorii săi proprii, descoperim subspațiul lui \mathbb{R}^2 pe care \mathbf{A} proiectează vectorii: dreapta $S = \{\alpha\{1, 1\} | \alpha \in \mathbb{R}\}$ alcătuită din acei vectori \mathbf{x} pe care \mathbf{A} nu îi modifică, $\mathbf{Ax} = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$, în timp ce pe ortogonaliile lor, $\mathbf{y} \in S^\perp$, îi transformă în vectorul nul, $\mathbf{Ay} = 0\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Aceste două subspații reprezintă pentru \mathbf{A} *subspațiile sale proprii*. Matricea din al doilea exemplu, a cărei valori și vectori proprii sunt de tip complex, poate fi la rândul său regăsită printre transformările liniare ale planului. Ea este matricea de rotație a vectorilor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ cu unghiul $\theta = \pi/2$ (confrunțați cu exemplul c) din §9.1). Prin această transformare, niciun vector nenul $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ nu poate fi coliniar cu imaginea sa. Pe de altă parte, condiția $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ exprimă tocmai o astfel de coliniaritate atunci când $\lambda \in \mathbb{R}$. Prin urmare, singurii vectori nenuli \mathbf{x} și singurele valori λ care pot satisface o astfel de relație nu sunt de tip real.

11.2 Diagonalizarea matricelor

Printre aplicațiile importante ale problemei cu valori și vectori proprii se numără și reducerea unei matrice pătrate la o structură simplă cu ajutorul unei transformări de similaritate (vezi §9.3). Această structură depinde de matrice, forma cea mai simplă fiind reprezentată de matricele diagonalizabile, clasă din care fac parte ambele exemple tratate în §11.1.

Definiție:

O matrice $\mathbf{A}_{n \times n}$ este *diagonalizabilă* dacă este similară, în sensul relației din §9.3, cu o matrice $n \times n$ diagonală (adică având elemente nenule

cel mult pe diagonală).

Găsirea matricei nesingulare S și a matricei diagonale Δ astfel încât

$$S^{-1}AS = \Delta$$

se numește *problema diagonalizării* și se rezolvă determinând valorile proprii ale matricei A și vectorii proprii corespunzători acestora.

Exemplu

$$A = \{\{1, 4, -4\}, \{-1, 5, -3\}, \{-1, 2, 0\}\}$$

La primul pas, determinăm valorile proprii prin comanda

$$\text{Eigenvalues}[A]$$

$$\{3, 2, 1\}$$

Proprietate:

O matrice $A_{n \times n}$ cu toate cele n valori proprii *distincte* este diagonalizabilă. Dacă S este matricea având drept coloane vectorii proprii ai lui A cores-punzători acestor n valori proprii, atunci S eate nesingulară și $S^{-1}AS = \Delta$. Pe diagonala matricei Δ apar valorile proprii ale lui A , în ordinea dispunerii vectorilor proprii în coloanele lui S .

La pasul următor, putem astfel trece la determinarea vectorilor proprii care formează coloanele matricei S . Această operație se realizează folosind comanda

$$\text{Eigenvectors}[A]$$

$$\{\{2, 1, 0\}, \{0, 1, 1\}, \{1, 1, 1\}\}$$

După cum s-a precizat mai sus, vectorii proprii sunt așezați în S în

ordinea corespunzătoare așezării valorilor proprii în Δ . De exemplu, vectorul $\{2, 1, 0\}$ corespunde primei valori proprii $\lambda_1 = 3$.

Putem verifica acum relația $S^{-1}AS = \Delta$:

```
Inverse[Transpose[Eigenvalues[A]]].A.  
Transpose[Eigenvalues[A]]  
  
{3, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 1}
```

Aceași verificare se poate realiza și prin comanda `EigenSystem[A]` care determină simultan valorile și vectorii proprii corespunzători pentru o matrice A . Dacă notăm cu `valorip` și `vectorip` valorile proprii, respectiv vectorii proprii corespunzători ai lui A , atunci din

```
{valorip, vectorip} = EigenSystem[A]
```

rezultă

```
valorip  
{3, 2, 1}  
vectorip  
{{2, 1, 0}, {0, 1, 1}, {1, 1, 1}}
```

și, în final,

```
Inverse[Transpose[vectorip]].A.  
Transpose[vectorip] ==  
DiagonalMatrix[valorip]  
  
True
```


11.3 Aplicații ale diagonalizării matricelor

1. *Calculul puterilor* unei matrice diagonalizabile A se realizează plecând de la relația

$$A = S\Delta S^{-1}$$

Ridicăm ambii membri la pătrat și, utilizând asociativitatea produsului matriceal, rezultă

$$A^2 = S\Delta S^{-1}S\Delta S^{-1} = S\Delta^2 S^{-1},$$

iar prin inducție

$$A^n = S\Delta^n S^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Reluăm exemplul prezentat în §11.2. Întrucât

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă că

$$\Delta^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

iar

$$\begin{aligned}
 A^n &= S\Delta^n S^{-1} = \\
 &\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} 1 & -2 + 2 \times 3^n & 2 - 2 \times 3^n \\ 1 - 2^n & -2 + 2^{1+n} + 3^n & 2 - 2^n - 3^n \\ 1 - 2^n & -2 + 2^{1+n} & 2 - 2^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

În **"M"**, acest calcul se realizează folosind comanda `MatrixPower[A, n]`:

```
MatrixPower[{{1, 4, -4}, {-1, 5, -3}, {-1, 2, 0}}, n];
%//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 + 2 \times 3^n & 2 - 2 \times 3^n \\ 1 - 2^n & -2 + 2^{1+n} + 3^n & 2 - 2^n - 3^n \\ 1 - 2^n & -2 + 2^{1+n} & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

2. *Calculul unei funcții de matrice $f(A)$. Cazul $f(z) = e^z$.*

Întrucât funcția e^z este analitică în \mathbb{C} , adică este reprezentabilă prin seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, putem extinde această

funcție la matrice pătrate complexe sub forma $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)A^n$. Pentru a obține formula de calcul a acestei funcții în cazul matricei diagonalizabile A , procedăm astfel:

- a) Efectuând calculul, anterior explicat, al puterilor A^n și făcând înlocuirea formală în seria de puteri a lui e^z , obținem

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S \Delta^n S^{-1} = S \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n \right] S^{-1}$$

Paranteza [...] reprezintă cazul particular al funcției e^A , deci

$$e^A = S e^{\Delta} S^{-1}$$

- b) Calculul lui e^A îl vom exemplifica pe matricea diagonală de mai sus:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$e^{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Înlocuind în expresia lui e^A , găsim formula de calcul a acestei funcții de matrice:

$$\begin{aligned} e^A &= \mathbf{S}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1} = \\ &\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} e & -2e + 2e^3 & 2e - 2e^3 \\ e - e^2 & -2e + 2e^2 + e^3 & 2e - e^2 - e^3 \\ e - e^2 & -2e + 2e^2 & 2e - e^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Generalizarea este imediată și ne conduce la formula exponențială a matricei \mathbf{A}

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \text{ diagonal } (e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \mathbf{S}^{-1}.$$

În “**M**”, comanda `MatrixExp[A]` calculează funcția e^A :

$$\text{MatrixExp} \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right];$$

`%//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

`MatrixExp[A]//Expand;`
`%//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} e & -2e + 2e^3 & 2e - 2e^3 \\ e - e^2 & -2e + 2e^2 + e^3 & 2e - e^2 - e^3 \\ e - e^2 & -2e + 2e^2 & 2e - e^2 \end{pmatrix}$$

Ea se aplică nu numai matricelor diagonalizabile, ci oricărei matrice pătratice (vezi exercițiul 12).

* * *

1. Calculați cu creionul pe hârtie soluția sistemului de ecuații prezentat ca primă aplicație în §5.2, efectuând cei doi pași ai algoritmului *substituții regresive*.

2.

- (1) Să se determine, în fiecare caz, valorile parametrilor s și t pentru care următoarele sisteme sunt compatibile și, în aceste situații, toate soluțiile lor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 3s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & 1 & -5 \\ 6 & -9 & 9 & 11 \\ 4 & -6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} s \\ t - 2s \\ 3s + 2t \\ s - t \end{pmatrix}$$

(2) Se consideră un sistem liniar neomogen, a cărui matrice extinsă are o formă redusă pe linii fără pivot în ultima coloană (a termenilor liberi). Explicați compatibilitatea sa.

3. Utilizând comanda `Opalem` (vezi §5.2), aduceți matricele

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ -9 & -6 & 13 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & -5 & 4 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

la o formă redusă pe linii. Aplicați-le apoi “**M**”-comanda `RowReduce` pentru a constata că:

- a) numărul pivotilor, adică rangul, este în ambele variante același;
- b) pivotii aparțin, în ambele variante, acelorași coloane.

4. (Sisteme liniare simultane) Pentru a rezolva mai multe sisteme liniare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $A_1\mathbf{y} = \mathbf{c}$ etc., având aceeași matrice A și termeni liberi dați, metoda bazată pe operații elementare se aplică sub următoarea formă:

- construim o matrice extinsă¹ cu toți termenii liberi $[A|\mathbf{b}|\mathbf{c}\dots]$;
- prin operații elementare, reducem matricea extinsă la forma canonică pe linii $[A_1|\mathbf{b}_1|\mathbf{c}_1\dots]$;
- aplicăm algoritmul *substituții regresive* fiecăruia dintre sistemele $A_1\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A_1\mathbf{y} = \mathbf{c}_1$ etc., respectiv echivalente cu sistemele date inițial.

(1) Rezolvați în acest mod cele două sisteme liniare având ca matrice comună A și ca termeni liberi \mathbf{b} și \mathbf{c} , unde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¹Construcția matricei extinse se poate realiza cu “**M**”-comanda `Join` - vezi soluția exercițiului 2.

- (2) Cum poate fi adaptată schema de calcul prezentată mai sus pentru inversarea unei matrice nesingulare $A_{n \times n}$, știind că aceasta presupune rezolvarea a n sisteme liniare având pe A ca matrice comună? Care sunt termenii liberi corespunzători?

Aplicație: Calculați cu acest procedeu inversa matricei A de la punctul (1).

5. Ce părere aveți despre cum trebuie să arate forma canonică redusă pe linii pentru orice matrice $n \times n$ nesingulară? Verificați răspunsul (care trebuie să fie justificat) determinând această formă în cazul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pe această observație simplă se bazează un binecunoscut algoritim de calcul al inversei unei matrice.

Algoritm de inversare:

Așezăm în continuarea coloanelor matricei pătrate A de inversat, matricea unitate de același ordin n cu ea. Comanda “**M**” pentru obținerea acestei noi matrice este

`Join[A, IdentityMatrix[n], 2]`

Prin operații elementare, reducem matricea astfel obținută la forma canonică pe linii. Dacă A are rangul n (adică este inversabilă), în locul primelor n coloane va apare matricea unitate, iar în locul ultimelor n

coloane - matricea A^{-1} (vezi și exercițiul următor).

Aplicație: Determinați cu acest algoritm inversa matricei A și verificați rezultatul utilizând “**M**”-comanda pentru inversare `Inverse[A]`.

6. Amintim câteva proprietăți ale determinantului unei matrice pătrate A , notat $\det A$:

D1) Dacă A_1 se obține din A printr-o operație elementară O1 (vezi §5.2), atunci $\det A_1 = -\det A$.

D2) Dacă A_1 se obține din A prin operații elementare O3, atunci $\det A_1 = \det A$.

D3) Determinantul unei matrice pătrate având zerouri sub diagonală este produsul elementelor de pe diagonală.

Să observăm că pentru a aduce o matrice la o formă redusă pe linii, nu este necesară operația O2. În consecință determinantul oricărei matrice pătrate este egal cu + sau - produsul elementelor de pe diagonală unei forme reduse pe linii obținute fără O2.

Aplicație: Calculați determinantul fiecăreia dintre următoarele matrice după ce, în prealabil, le-ați adus prin operații O1 și O3 la o formă redusă pe linii:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ -3 & -9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinatul va fi produsul elementelor de pe diagonala formeii reduse, prevăzut cu semnul + dacă O1 a fost utilizată de un număr par (sau zero) de ori, respectiv cu semnul – dacă O1 a fost utilizată de un număr impar de ori.

7. (Produsul matrice \times vector-coloană)

- (1) Fie A matrice $m \times n$ și \mathbf{x} vector $n \times 1$. Verificați pe exemplele de mai jos validitatea următoarei proprietăți: dacă A este alcătuită din coloanele $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, iar \mathbf{x} din elementele x_1, \dots, x_n , atunci vectorul-coloană $A\mathbf{x}$ reprezintă combinația liniară $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ \frac{1}{3} & 3 & \pi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ e \\ \pi \end{pmatrix}$$

- (2) Fie $A_{m \times n}$ și $C_{n \times p}$, C având coloanele $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p$. Verificați pe exemplele de mai jos validitatea următoarei proprietăți: coloanele matricei-produs AC sunt $A\mathbf{c}_1, \dots, A\mathbf{c}_p$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & \pi \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) Orice matrice $m \times n$ de rang 1 poate fi reprezentată ca produs dintre o matrice-coloană $m \times 1$ și o matrice-linie $1 \times n$. Reciproc, orice asemenea produs este o matrice $m \times n$ de rang 1.

- a) Verificați aceste proprietăți pentru cazul când $m = 3$ și $n = 2$.
- b) Notăm cu \mathbf{a}_i coloanele matricei $A_{m \times n}$ și cu \mathbf{c}^i liniile matricei $C_{n \times p}$. Atunci produsul AC mai poate fi scris și sub forma sumei de matrice $\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{c}^i$ având rangul 1. Verificați aceasta în cazurile celor trei perechi de matrice de la punctul (2).

8. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

folosită în exemplul din §6.1.2.

(1) Verificați cu ajutorul consecinței din §6.2:

- a) egalitatea dintre subspațiul $\mathbf{Im}(A)$, generat de toate coloanele lui A , și subspațiul generat de coloanele 1 și 3;
- b) egalitatea de subspații $\mathbf{Im}(A^T) = \mathbf{Im}(A_1^T)$.

-
- (2) a) Verificați independența liniară a coloanelor 1 și 3 din matricea A utilizând metode descrise în capitolele 6 și 7 arătând că reprezintă, conform definiției 4 din capitolul 7, o bază pentru $\mathbf{Im}(A)$.
- b) Ce alte alegeri ale unei baze în $\mathbf{Im}(A)$ vedeți posibile ținând seama de relațiile de dependență liniară existente între coloanele matricei A ?
- c) Determinați coordonatele fiecărei coloane din A în baza formată de \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_3 , precum și matricea S de schimbare a acestei baze într-o bază formată cu alte coloane ale lui A și pe care urmează să o alegeți.

9. Noțiunea de complement ortogonal S^\perp al unui subspațiu S din \mathbb{R}^n (conform §8.2) și relația $\mathbf{Im}(A^T)^\perp = \mathbf{N}(A)$ ne oferă metode simple de determinare în “**M**” a unor baze pentru câteva subspații importante.

- (1) Începem cu o subrutină pentru determinarea unei baze în $\mathbf{Im}(A)^\perp$:

```

ComplementOrtogonal[A_] :=
Which[MatrixRank[A] == Dimensions[A][[1]],
Table[0, {i, Dimensions[A][[1]]}, {j, 1}],
(MatrixRank[A] == 0 || A == {}),
IdentityMatrix[Dimensions[A][[1]]], True,
Transpose[NullSpace[Transpose[A]]] /; MatrixQ[A]

```

În esență ea se bazează pe relația de mai sus, completată cu două excepții: pentru matricele nule și pentru matricele-linie. Deoarece

complementarea ortogonală a unui subspațiu este o operație involutivă: $S^{\perp\perp} = S$, prin dubla sa aplicare asupra lui A se va obține o bază în $\mathbf{Im}(A)$.

Observație: Aplicarea de n ori a aceleiași funcții f asupra lui x se poate realiza cu “**M**”-comanda `Nest[f, x, n]`. Putem astfel defini o funcție prin care se obține o bază în $\mathbf{Im}(A)$:

$$\text{Baza}[A_]:= \text{Nest}[\text{ComplementOrtogonal}, A, 2]$$

Testați acest fapt asupra primelor zece matrice 3×4 de numere binare produse aleatoriu prin comanda

$$A = \text{Table}[\text{RandomInteger}[\{0, 1\}], \{i, 3\}, \{j, 4\}];$$

- (2) O altă aplicație utilă a subrutinei de complementare ortogonală o constituie subrutina de obținere a unei baze în suma a două subspații definite prin generatori vectori-coloană: $V = \mathbf{Im}(A)$ și $W = \mathbf{Im}(B)$ (vezi §6.3). Aceasta se reduce la determinarea bazei în $\mathbf{Im}(A|B)$. Construiți subrutina și aplicați-o la determinarea bazei pentru câteva perechi de matrice binare cu 3, respectiv 4 linii și $\{2, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 3\}$ coloane produse aleatoriu (vezi instrucțiunea precedentă).
- (3) O aplicație interesantă este construirea subrutinei de obținere a unei baze în intersecția subspațiilor $V = \mathbf{Im}(A)$ și $W = \mathbf{Im}(B)$ utilizând următoarea proprietate a complementării ortogonale:

$$(V + W)^{\perp} = V^{\perp} \cap W^{\perp}$$

Construiți subrutina și utilizați-o împreună cu cea de la punctul precedent pentru perechi de matrice binare produse aleatoriu și

având aceleași dimensiuni ca la punctul (2), pentru a verifica legea

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W)$$

(a se vedea și exemplul din §6.3).

10. Pentru a construi matricea de proiecție a vectorilor spațiului \mathbb{R}^m pe un subspațiu $S = \mathbf{Im}(A)$, unde A este o matrice $m \times n$, generăm mai întâi o bază ortonormată a lui S .

- (1) Utilizând subrutina de obținere a bazei în $\mathbf{Im}(A)$ construită în exercițiul precedent, completați-o astfel încât baza să fie ortonormată.

- (2) Matricea de proiecție pe subspațiul S va putea fi obținută ținând seama că proiecția fiecărui vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ pe S este suma proiecțiilor sale pe versorii bazei ortonormate construite anterior. Astfel, adunând cele r proiecții ale lui \mathbf{x} pe versorii $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ ai bazei ($r = \text{rang}(A)$),

$$\vec{\text{pr}}_{\mathbf{u}_i} \mathbf{x} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{x} \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{x},$$

obținem proiecția sa pe S . În concluzie, matricea căutată va fi

$$P = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$$

- a) Construiți matricea de proiecție a vectorilor din \mathbb{R}^4 pe

subspațiul $S = \mathbf{Im}(A)$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Verificați că matricea P astfel obținută coincide cu produsul UU^T , unde $U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$, și că are cele două proprietăți ale matricelor de proiecție: simetria și idempotența - vezi §8.6).

11. Pentru a determina dreapta de regresie corespunzătoare punctelor $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, p$, din plan, considerăm matricea $p \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^T$$

și vectorul-coloană $p \times 1$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_p \end{pmatrix}^T$$

Ecuatiile normale corespunzătoare acestor date vor avea matricea

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p x_i^2 & \sum_{i=1}^p x_i \\ \sum_{i=1}^p x_i & p \end{pmatrix}$$

și termenul liber

$$A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p x_i y_i \\ \sum_{i=1}^p y_i \end{pmatrix}$$

iar soluția lor va fi $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{m}, \bar{n})$.

- (1) Verificați că cele două ecuații normale se pot pune sub forma

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p x_i (\bar{m}x_i + \bar{n} - y_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^p (\bar{m}x_i + \bar{n} - y_i) &= 0 \end{aligned}$$

Mărimea $\bar{m}x_i + \bar{n} - y_i$ se numește *abatere cu semn* în punctul $P_i(x_i, y_i)$, iar a doua ecuație afirmă că suma acestor abateri este nulă.

- (2) Metoda celor mai mici pătrate se poate aplica nu numai în cazul determinării unei funcții liniare (dreaptă), ci și a unei categorii mai largi de curbe plane, cu scopul obținerii unei legi de dependență între un set de valori ale lui x și setul corespunzător de valori pentru y . Astfel, pentru o curbă de gradul al doilea,

$$y = ax^2 + bx + c,$$

plecând de la sistemul

$$x_i^2 a + x_i b + c = y_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

liniar în necunoscutele a , b , c , putem aplica această metodă și determina “parabola de aproximare în sensul metodei celor mai mici pătrate” pentru cele p puncte. Scrieți ecuațiile normale corespunzătoare acestui sistem și celor cinci puncte din exemplul tratat în §10.3.

- (3) Pentru rezolvarea unor astfel de probleme dispunem în “**M**” de comanda `Fit`. De exemplu, în cazul dreptei de regresie, tipul de funcție căutat este o combinație liniară de x și 1. Plecând de la setul de date (puncte):

$$\text{date} = \{\{1, 0.5\}, \{2, 2\}, \{4, 3.5\}, \{5, 4\}, \{7, 5\}\}$$

prin comanda

$$\text{Fit}[\text{date}, \{x, 1\}, x]$$

$$0.25 + 0.723684 x$$

Aceleași date pot fi însă “ajustate” și potrivit unei curbe de gradul al doilea (parabolă) prin comanda

$$\text{Fit}[\text{date}, \{1, x, x^2\}, x]$$

$$-0.619048 + 1.3474 x - 0.0790043 x^2$$

Rezolvați ecuațiile normale găsite la punctul (2): fie calculând soluția \bar{x} conform §10.3, fie aplicând comanda `LeastSquares` sistemului incompatibil obținut la punctul (2) al acestui exercițiu.

Verificați coincidența rezultatelor găsite pe aceste căi diferite.

12. Pentru a calcula puterile unei matrice nedijagonalizabile A , putem utiliza alte forme similare cu A și mai simple decât ea. Dintre acestea, structura cea mai simplă o are forma Jordan J_A a lui A . În “**M**”, ea se obține prin comanda `JordanDecomposition[A]`.

Exemplu

Pentru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vectorii proprii sunt

`Eigenvectors[A]`

$$\{\{1, 0, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}\}$$

Aceasta înseamnă că matricea are un singur vector propriu și anume, $(1, 0, 1)$.

Observație: Când o matrice $n \times n$ are mai puțin de n vectori proprii liniar independenți, în clasa ei de similaritate nu se găsește nicio matrice diagonală. Dar există întotdeauna o matrice superior triunghiulară având pe diagonală celule numite *celule Jordan*. Această matrice se poate obține prin comanda

`JordanDecomposition[A][[2]]`

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

J_A este aici ea însăși o celulă Jordan de ordinul al treilea, corespunzătoare unicei valori proprii $\lambda = 0$ a lui A . O notăm $J_3(0)$. Deci $J_A = J_3(0)$. Precizăm că numărul celulelor Jordan din J_A este întotdeauna egal cu numărul vectorilor proprii liniar independenți ai lui A .

Comanda `JordanDecomposition[A]` mai produce și un alt rezultat: o matrice nesingulară

$$S = \text{JordanDecomposition}[A][[1]]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

care verifică relația $S^{-1}AS = J_A$, echivalentă cu $A = SJ_AS^{-1}$.

- (1) a) Calculați puterile succesive ale celulei $J_3(0)$ pentru $n = 2, 3, \dots$. Apoi pe cele ale celulei $J_3(\lambda) = \lambda I_3 + J_3(0)$, cunoscând faptul că, dacă matricele pătrate A și B comută ($AB = BA$), atunci formula binomului lui Newton

$$(A + B)^n = \sum_{i=1}^n C_n^i A^{n-i} B^i$$

este valabilă.

b) Utilizând rezultatul de mai sus și formula $A = SJ_A S^{-1}$, determinați matricea A^n .

(2) Plecând de la aceste rezultate, putem trece la calculul matricei $e^A = Se^{J_A}S^{-1}$. Mai întâi, vom obține formula de calcul pentru exponențiala celulei Jordan $J_3(\lambda)$.

a) Prin calcul direct rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (1/n!)(J_3(0))^n$ se reduce la primii trei termeni. Arătați că

$$e^{J_3(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Pentru a trece la calculul matricei $e^{J_3(\lambda)}$, enunțăm fără demonstrație o proprietate deductibilă direct din definiția exponențialei de matrice ca serie de puteri de matrice și din formula binomului newtonian pentru matrice comutative:

Proprietate: Dacă $AB = BA$, atunci $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$. Verificați ipoteza proprietății în cazul matricelor $J_3(0)$ și λI_3 , iar apoi deduceți de aici că

$$e^{J_3(\lambda)} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Utilizând exemplul precedent, calculați exponențialele celulelor Jordan $e^{J_n(\lambda)}$, pentru $n = 4$, apoi pentru n număr natural oarecare.
- (3) În cazul general al unei matrice pătrate A , forma Jordan J_A poate avea pe diagonală celule Jordan de diverse dimensiuni corespunzătoare valorilor proprii ale lui A . Considerăm exemplul teoretic al formei Jordan alcătuite din celulele $J_3(\lambda_1)$, $J_1(\lambda_2)$ și $J_2(\lambda_2)$, în această ordine. În “**M**”, putem defini generic celula $J_k(\lambda)$ astfel:

```
J[k_, λ_] :=
Table[Which[i == j, λ, i + 1 == j, 1, True, 0], {i, k}, {j, k}]
```

iar matricea din exemplu se poate construi cu “**M**”-comanda `ArrayFlatten` astfel:

```
J_A = ArrayFlatten[
{{J[3, λ_1], 0, 0}, {0, J[1, λ_2], 0}, {0, 0, J[2, λ_2]}}];
```

- a) Executând succesiv în “**M**” aceste comenzi, verificați faptul că J_A este matricea diagonal celulară considerată.
- b) Calculați în “**M**” matricea J_A^k , pentru k număr natural oarecare.
- c) Calculați în “**M**” limita sumei matriceale

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} J_A^k$$

pentru $n \rightarrow \infty$.

Exercițiul 2.**Soluție 1a)**

Observație: Când sistemul liniar este dat prin matricea sa și prin coloana termenilor liberi, aici

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

și

$$\begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 3s \end{pmatrix}$$

putem obține matricea extinsă utilizând “**M**”-comanda `Join` după cum urmează:

$$A = \text{Join} \left[\left(\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 3s \end{pmatrix} \right), 2 \right];$$

`A//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & s \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 3s \end{pmatrix}$$

`A1 = Opelim[A][1, 2][1]; A1//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & s \\ 0 & 4 & 1 & 1 + \frac{s}{2} \\ 1 & 6 & 0 & 3s \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \text{Opelem}[A_1][1, 3][1]; A_2 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & s \\ 0 & 4 & 1 & 1 + \frac{s}{2} \\ 0 & 4 & 1 & \frac{5s}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \text{Opelem}[A_2][2, 3][2]; A_3 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & s \\ 0 & 4 & 1 & 1 + \frac{s}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 + 2s \end{pmatrix}$$

$$A_3 /. s \rightarrow \frac{1}{2} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Substituții regresive:

$$x_2 = -\frac{x_3}{4} + \frac{5}{16}, \quad x_1 = \frac{3x_3}{2} - \frac{3}{8}$$

Soluție 1b)

$$A = \text{Join} \left[A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & 1 & -5 \\ 6 & -9 & 9 & 11 \\ 4 & -6 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ s - 2t \\ 3(s + t) \\ s + 2t \end{pmatrix}, 2 \right];$$

A//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & t \\ -4 & 6 & 1 & -5 & s - 2t \\ 6 & -9 & 9 & 11 & 3(s + t) \\ 4 & -6 & -1 & 5 & s + 2t \end{pmatrix}$$

A₁ = Opelem[A][1, 2][1]//Simplify; A₁//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 & s \\ 6 & -9 & 9 & 11 & 3(s + t) \\ 4 & -6 & -1 & 5 & s + 2t \end{pmatrix}$$

A₂ = Opelem[A₁][1, 3][1]//Simplify; A₂//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 & s \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3s \\ 4 & -6 & -1 & 5 & s+2t \end{pmatrix}$$

$A_3 = \text{Opelem}[A_2][1,4][1]//\text{Simplify}; A_3//\text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 & s \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3s \\ 0 & 0 & -3 & -1 & s \end{pmatrix}$$

$A_4 = \text{Opelem}[A_3][2,3][3]; A_4//\text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & -3 & -1 & s \end{pmatrix}$$

$A_5 = \text{Opelem}[A_4][2,4][3]; A_5//\text{MatrixForm}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2s \end{pmatrix}$$

(A₅/.s → 0)//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 3 & t \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Substituții regresive:

$$x_3 = -\frac{x_4}{3}, \quad x_1 = \frac{3x_2}{2} - \frac{8x_4}{6} + \frac{t}{2}$$

unde $x_2, x_4, t \in \mathbb{R}$ ca parametri.

Soluție 2)

Considerăm sistemul echivalent cu cel dat și având ca matrice extinsă-forma redusă pe linii a matricei extinse pentru sistemul dat. Condiția problemei echivalează cu inexistența în acest sistem a relațiilor de incompatibilitate de tipul celor întâlnite în aplicația din §5.2 și la primul punct din acest exercițiu. Sistemul echivalent poate fi atunci rezolvat prin “substituții regresive”.

Exercițiul 3.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 0 & 1 & 9 \\ -9 & -6 & 13 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \text{Opelem}[A][1, 2][1]; A_1 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ -9 & -6 & 13 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \text{Opelem}[A_1][1, 3][1]; A_2 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \text{Opelem}[A_2][2, 3][3]; A_3 // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{RowReduce}[A] // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 1/6 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deci doi pivoti în coloanele 1 și 3.

Exercițiul 4.

Soluție 1)

Notăm cu B matricea A extinsă cu cele două coloane \mathbf{b} și \mathbf{c} . După cum am văzut mai sus, B se obține prin “**M**”-comanda `Join`:

$$B = \text{Join}[A, \mathbf{b}, \mathbf{c}, 2]; B // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Putem scurta calculul utilizând “**M**”-comanda de reducere la forma canonică pe linii a matricei B :

$$\text{RowReduce}[B] // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Obținem astfel direct cele două coloane-soluții pentru sistemele echivalente cu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ și $A\mathbf{y} = \mathbf{c}$ și anume,

$$I_3\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$I_3\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Soluție 2)

Repetăm cu fidelitate procedeeul de la punctul 1, înlocuind coloanele \mathbf{b} și \mathbf{c} cu cele trei coloane ale matricei

$$I_3 = \text{IdentityMatrix}[3];$$

$$B = \text{Join}[A, I_3, 2]; B / \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Apoi, tot ca la punctul 1, trecem la forma canonică pe linii a matricei B :

`RowReduce[B]//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

și pe ultimile trei poziții citim coloanele inversei lui A .

Verificare:

`Inverse[A]//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} -1/4 & -1/2 & 5/4 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \\ -1/4 & 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 5.

Justificare: Trebuie să coincidă cu I_n deoarece, fiind nesingulară, ea are pivot pe fiecare linie, deci, ca matrice pătrată, și pe fiecare coloană; iar pivoții trebuie să fie 1, cu 0 în restul coloanei pe care se află.

Exercițiul 6.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

`A1 = Opelem[A][1, 2][1]; A1//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

`A2 = Opelem[A1][1, 3][1]; A2//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Deci $\det A = \det A_2 = (-2)2(-1) = 4$.

Verificare:

$$\text{Det}[A] == 4$$

True

Exercițiul 8.**Soluție 1a)**

Notând $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ trebuie arătat că $\mathbf{Im}(A) = \mathbf{Im}(B)$. În acest

scop, se verifică dubla incluziune $\mathbf{Im}(A) \xrightarrow{\supseteq} \mathbf{Im}(B)$ și $\mathbf{Im}(B) \xrightarrow{\supseteq} \mathbf{Im}(A)$ folosind testul din §6.2. De exemplu,

$$\text{SubspatiuQ} \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

True

Soluție 1b)

Prin “**M**”-testul anterior se verifică dubla incluziune $\mathbf{Im}(A^T) \xrightarrow{\supseteq} \mathbf{Im}(A_1^T)$ și $\mathbf{Im}(A_1^T) \xrightarrow{\supseteq} \mathbf{Im}(A^T)$:

$$\text{SubspatiuQ} \left[\text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \right] \right],$$

$$\text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \right]$$

$$\text{SubspatiuQ} \left[\text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \right] \right],$$

$$\text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \right]$$

True

Observație: În acest stadiu, este bine ca cititorul să înlocuiască în “M”-testele de mai sus oricare două dintre matricele A , A_1 , A_2 , A_3 ,

pentru a verifica cele trei egalități între subspațiile de linii. În plus, putem adăuga și egalitatea cu subspațiul liniilor formei canonice a lui A :

$$A_4 = \text{RowReduce} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \right]; A_4 // \text{MatrixForm}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{SubspatiuQ} \left[\text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \right] \right],$$

$$\text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right]$$

True

$$\text{SubspatiuQ} \left[\text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right], \right.$$

$$\left. \text{Transpose} \left[\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{array} \right) \right] \right]$$

True

Soluție 2a)

Cel mai simplu mod de a face verificarea independenței liniare este prin testarea rangului matricii celor două coloane:

$$\text{MatrixRank} \left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right) \right] == 2$$

True

Întrucât am verificat la punctul (1a) că cele două coloane generează subspațiul $\mathbf{Im}(A)$, conform definiției bazei (vezi capitolul 7, definiția 4) ele reprezintă o bază pentru $\mathbf{Im}(A)$.

Soluție 2b)

Definiție: Două sisteme de vectori din spațiul V sunt *echivalente* dacă generează același subspațiu din V .

Testarea echivalenței se poate face încercând exprimarea fiecăruia din vectorii unui sistem drept combinații liniare de vectorii celuilalt sistem și reciproc. Notând sistemele (finite) de vectori cu $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, respectiv $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$, aceasta revine la existența relațiilor

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)^T &= S_1(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)^T \\ (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)^T &= S_2(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)^T,\end{aligned}$$

unde S_1 și S_2 sunt matrice $m \times n$, respectiv $n \times m$. Bazele sunt sisteme echivalente de vectori linear independenți (în acest caz rezultând că $m = n$). Întrucât această testare se poate face, în cazul vectorilor-coloană, cu instrucțiunea din §6.2 (consecința), alegerea unei baze alternative pentru $\mathbf{Im}(A)$ se rezumă la testarea echivalenței dintre sistemul coloanelor 1 și 3 și o altă pereche de coloane din A . De exemplu coloanele 2 și 4 (testați echivalența!).

Observație: Aplicând comanda `DepLin` construită în “**M**” (capitolul 7, observația 5), obținem

$$\text{DepLin} \left[A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Relațiile de dependență liniară între liniile v_i ale matricei sunt:

$$-v_1 + v_2 + v_3 = \mathbf{0}.$$

Relațiile de dependență liniară între coloanele w_i ale matricei sunt:

$$\begin{aligned} -w_1 - w_3 + w_5 &= 0 \\ -2w_1 + w_3 + w_4 &= 0 \\ 2w_1 + w_2 &= 0 \end{aligned}$$

Astfel, din cele trei relații de dependență liniară între coloanele matricei A putem extrage dubla exprimare între sistemele (w_1, w_3) și (w_2, w_4) :
exercițiu! Ceea ce dovedește că perechea de vectori aleasă este bază pentru $\text{Im}(A)$.

Soluție 2c)

Matricea S are drept coloane coeficienții relațiilor prin care vectorii bazei nou alese se exprimă în baza inițială. În cazul noii baze (a_2, a_4) , rezultă

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 9.

Soluție 1)

Un program pentru testarea propusă poate fi următorul:

```
n = 1; While[n ≤ 10, A = Table[RandomInteger[{0, 1}], {i, 3}, {j, 4}];  
Print["A = ", A//MatrixForm, " Baza in Im(A) = ",  
Nest[ComplementOrtogonal, A, 2]//MatrixForm]; n ++]
```

Soluție 2)

Întrucât $[A|B]$ se obține prin comanda $\text{Join}[A, B, 2]$ (vezi §6.3), determinarea bazei în sumă se face - conform punctului (1) din acest

exercitiu - prin comanda

```
Nest[ComplementOrtogonal, Join[A, B, 2], 2]
```

iar testarea cerută se poate realiza, de exemplu, prin programul

```
For[n = 3, n ≤ 4, n ++,
For[p = 2, p ≤ 3, p ++,
For[q = 2, q ≤ 3, q ++, A = Table[RandomInteger[{0, 1}], {i, n}, {j, p}];
B = Table[RandomInteger[{0, 1}], {i, n}, {j, q}];
Print["A = ", A//MatrixForm, " B = ", B//MatrixForm,
" Baza in suma = ",
Nest[ComplementOrtogonal, Join[A, B, 2], 2]]//MatrixForm]]
```

Soluție 3)

Involutivitatea complementării ortogonale permite rescrierea formulei menționate sub forma

$$(V^\perp + W^\perp)^\perp = V \cap W.$$

O bază în intersecția $\mathbf{Im}(A) \cap \mathbf{Im}(B)$ va putea fi construită drept bază în complementul ortogonal al unei sume: $\mathbf{Im}(A)^\perp + \mathbf{Im}(B)^\perp$. Rezultatul acestui raționament este comanda

```
Intersectia[A_, B_] :=
ComplementOrtogonal[
Suma[ComplementOrtogonal[A], ComplementOrtogonal[B]]]
```

în care

```
Suma[A_, B_] := ComplementOrtogonal[
ComplementOrtogonal[Join[A, B, 2]]]
```

Lăsăm cititorului plăcerea de a combina aceste două comenzi cu miniprogramul de testare utilizat la punctul (2), pentru a verifica legea

dimensiunilor:

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W).$$

Exercițiul 10.

Soluție 1)

O bază în $\mathbf{Im}(A)$ se obține aplicând matricii A comanda `Baza[A]`, conform exercițiului 9, punctul (1). Ortonormarea sistemului de vectori-coloană astfel obținut se realizează aplicând “**M**”-comanda `Orthogonalize` matricii transpuse:

$$\text{Transpose}[\text{Baza}[A]]$$

Pentru a reveni la vectori-coloană, subrutina completă va fi:

$$\text{Transpose}[\text{Orthogonalize}[\text{Transpose}[\text{Baza}[A]]]]$$

Soluție 2)

a) Aplicând această subrutină matricii A date obținem baza ortonormată:

$$U = \text{Transpose}[\text{Orthogonalize}[\text{Transpose}[\text{Baza}[A]]]]$$

$$\left\{ \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{15}} \right\}, \left\{ 0, \sqrt{\frac{3}{5}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{15}} \right\} \right\}$$

$$P = U.\text{Transpose}[U]$$

$$\left\{ \left\{ \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5} \right\}, \left\{ \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right\}, \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right\}, \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right\} \right\}$$

b) Egalitatea $UU^T = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ este o consecință a regulii de înmulțire a matricelor (vezi și exercițiul 7, punctul 3.b) și poate fi verificată cu următorul program având ca date de intrare dimensiunile $\text{Dimensions}[A] = \{m, n\}$ ale matricei testate:

```
A = Table[RandomInteger[{-3, 3}], {i, m}, {j, n}];
```

(*matrice de test cu numere întregi aleatoare în intervalul {-3,3}*)

```
A.Transpose[A] == Sum[Transpose[{A[[A11, i]]}], {A[[A11, i]]},
{i, Dimensions[A][[2]]}]
```

(*testul propriu-zis*)

Verificarea pentru $P = UU^T$ a celor două proprietăți ale matricelor de proiecție:

$$P^T = (UU^T)^T = U^{TT}U^T = UU^T = P$$

$$P^2 = P$$

Demonstrația proprietății de idempotență se bazează pe ortonormarea coloanelor lui U , din care rezultă

$$U^T U = I$$

(demonstrați aceasta!).

Exercițiul 11.

Soluție 1)

Înlocuind soluția $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{m}, \bar{n}\}$ în sistemul ecuațiilor normale, obținem

$$\bar{m} \sum_{i=1}^p x_i^2 + \bar{n} \sum_{i=1}^p x_i - \sum_{i=1}^p x_i y_i = 0$$

$$\bar{m} \sum_{i=1}^p x_i + \bar{n} p - \bar{n} \sum_{i=1}^p y_i = 0.$$

Expresiile căutate rezultă prin rearanjarea factorilor comuni sub o singură sumă.

Soluție 2)

Formele matricei și termenului liber sunt

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p x_i^4 & \sum_{i=1}^p x_i^3 & \sum_{i=1}^p x_i^2 \\ \sum_{i=1}^p x_i^3 & \sum_{i=1}^p x_i^2 & \sum_{i=1}^p x_i \\ \sum_{i=1}^p x_i^2 & \sum_{i=1}^p x_i & p \end{pmatrix}$$
$$A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p x_i^2 y_i \\ \sum_{i=1}^p x_i y_i \\ \sum_{i=1}^p y_i \end{pmatrix}$$

Prin înlocuirea valorilor $p = 5$ și $\{x_i, y_i\}$, $i = 1, \dots, 5$, găsim

$$A^T A = \{\{3299, 541, 95\}, \{541, 95, 19\}, \{95, 19, 5\}\}$$

$$A^T \mathbf{b} = \{\{409.5\}, \{73.5\}, \{15.\}\}$$

Soluție 3)

Rezolvând ecuațiile normale, obținem

$$\bar{\mathbf{x}} = \text{LinearSolve}[\{\{3299, 541, 95\}, \{541, 95, 19\}, \{95, 19, 5\}\},$$
$$\{\{409.5\}, \{73.5\}, \{15.\}\}]$$

$$\{\{-0.0790043\}, \{1.3474\}, \{-0.619048\}\}$$

Pe de altă parte, matricea A a sistemului (incompatibil) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ va

avea forma

$$A = \text{Table}[\{\{x_i^2, x_i, 1\}, \{i, 5\}\}]$$

în care, înlocuind valorile absciselor celor cinci puncte, obținem

$$A/. \{x_1 \rightarrow 1, x_2 \rightarrow 2, x_3 \rightarrow 4, x_4 \rightarrow 5, x_5 \rightarrow 7\}$$

$$\{\{1, 1, 1\}, \{4, 2, 1\}, \{16, 4, 1\}, \{25, 5, 1\}, \{49, 7, 1\}\}$$

$$\text{LeastSquares}[\{\{1, 1, 1\}, \{4, 2, 1\}, \{16, 4, 1\}, \{25, 5, 1\}, \{49, 7, 1\}\}, \{0.5, 2, 3.5, 4, 5\}]$$

$$\{-0.0790043, 1.3474, -0.619048\}$$

Exercițiul 12.

Soluție 1)

$$\text{Pentru } n > 0, J_3(0)^n = \mathbf{0}.$$

Prin inducție, sau prin aplicarea formulei binomului, deoarece λI_3 și $J_3(0)$ comută, rezultă:

$$J_3(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Observație: Această formulă se poate generaliza (de exemplu cu formula binomului) pentru calculul puterii n în cazul oricărei celule Jordan $J_k(\lambda)$. Ea va avea λ^n pe diagonală, iar pe supradiagonale,

$j = 1, 2, \dots, k - 1$, elementul $C_n^j \lambda^{n-j}$ (pentru $j < n$).

Soluție 2)

a) Așadar, scriind exponențiala $e^{J_3(0)}$ ca serie de puteri de matrice (vezi §11.3, pctul 2), obținem

$$e^{J_3(0)} = I_3 + J_3(0) + \frac{1}{2}J_3(0)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) În virtutea proprietății enunțate, pentru orice λ

$$e^{J_3(\lambda)} = e^{\lambda I_3 + J_3(0)} = e^{\lambda I_3} e^{J_3(0)} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Pentru $J_4(0)$ vom avea

$$e^{J_4(0)} = I_4 + J_4(0) + \frac{1}{2}J_4(0)^2 + \frac{1}{6}J_4(0)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și

$$e^{J_n(0)} = I_n + J_n(0) + \frac{1}{2}J_n(0)^2 + \frac{1}{6}J_n(0)^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}J_n(0)^{n-1}$$

respectiv

$$e^{J_n(\lambda)} = e^\lambda e^{J_n(0)}$$

Soluție 3)

a) Aplicând succesiv cele două comenzi, obținem

`JA//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

b)

`MatrixPower[JA, k]//MatrixForm`

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{-1+k} & \frac{1}{2}(-1+k)k\lambda_1^{-2+k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & k\lambda_1^{-1+k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^k & k\lambda_2^{-1+k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}$$

c)

```
Limit[Sum[ $\frac{1}{n!}$ MatrixPower[JA, k], {n, 0, n}], n → ∞]//
FullSimplify//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Observație: "M"-comanda MatrixExp[A] produce același rezultat ca și

calculul precedent:

$$\text{MatrixExp[A]//MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1} & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2} & e^{\lambda_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

Bibliografie la partea a II-a

1. Bruce F.Torrence, Eve A. Torrence: The Student's introduction to Mathematica, Cambridge Press, 2009
2. Eugen Don: Mathematica - Shaum's Outlines, Mac Graw Hill, 2009
3. Inna Shingareva, Carlos Lizarraga-Celaya: Maple and Mathematica. A Problem Solving Approach for Mathematics, Springer Wien-NewYork, 2009
4. Teodor Stih: Algebra Liniara-teorie si probleme rezolvate, Editura ALL, 1999

Partea III

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Scopul acestei secțiuni este de a prezenta exemple de rezolvare a ecuațiilor diferențiale cu ajutorul softului Mathematica. Majoritatea exemplurilor prezentate au fost studiate în cadrul cursului de ecuații diferențiale.

Vor fi tratate următoarele probleme:

- rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin întâi cu ajutorul comenzii *DSolve*,
- rezolvarea ecuațiilor diferențiale scriind comenzile corespunzătoare parcurgerii etapelor caracteristice tipului de ecuație diferențială considerată care să conducă la găsirea soluției acesteia,
- determinarea traiectoriilor ortogonale,
- rezolvarea unor ecuații diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți,
- rezolvarea unor sisteme diferențiale liniare de ordin întâi cu coeficienți constanți,
- desenarea traiectoriilor și a sensului de parcurs pe acestea în vecinătatea punctelor de echilibru în cazul sistemelor diferențiale liniare de ordin întâi, cu două necunoscute,
- prezentarea unor exemple de utilizare a transformatei Laplace.

* * *

 Ecuații diferențiale integrabile prin cuadraturi

14.1 Ecuații diferențiale cu variabile separabile

Forma generală a unei ecuații diferențiale de ordin întâi cu variabile separabile este

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) \quad (14.1.1)$$

unde $\mathbb{I}, \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$; $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții date continue cu $g(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{J}$, $x : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{J}$, x funcția necunoscută, derivabilă cu derivata continuă.

Exemplul 14.1.1 *Se consideră ecuația diferențială cu variabile separabile:*

$$x'(t) = \frac{t^2 x^2(t)}{1+t^2}, t \neq 0, x \neq 0.$$

Să se rezolve cu ajutorul Mathematicii.

Folosim comanda *DSolve*.

$$\text{eq1} = x'[t] == ((t^2 x[t]^2)/(1 + t^2))$$

$$\text{sol1} = \text{DSolve}[\text{eq1}, x[t], t]$$

$$x'[t] == \frac{t^2 x[t]^2}{1+t^2}$$

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow \frac{1}{-t + \text{ArcTan}[t] - C[1]} \right\} \right\}$$

Observăm din analiza exemplului de mai sus că structura comenzii *DSolve* este următoarea:

- primul argument al comenzii este ecuația sau, în cazul dat, ecuația definită anterior prin *eq1* sub formă normală, $x'(t) = f(t, x(t))$,

-al doilea argument este funcția necunoscută $x(t)$,

-al treilea argument este variabila independentă t .

Soluția am obținut-o sub formă explicită. Dacă rezolvăm o ecuație cu condiție inițială, precizăm condiția în comanda *DSolve*, în acoladă alături de ecuație și obținem soluția unică a problemei Cauchy.

$$\text{sol11} = \text{DSolve}[\{\text{eq1}, x[0.5] == 1\}, x[t], t]$$

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow \frac{1}{1-t + \text{ArcTan}[t]} \right\} \right\}$$

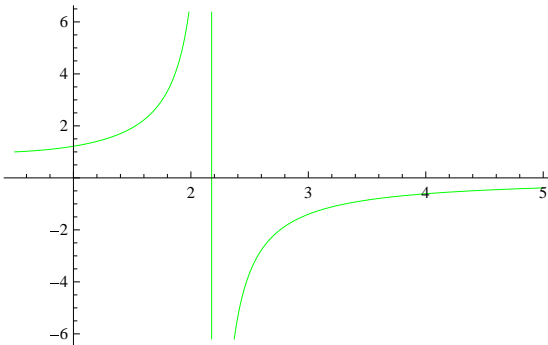
Graficul soluției obținută sub formă explicită îl trasăm cu ajutorul comenzii *Plot*. Comanda conține funcția, intervalul în care variază necunoscuta și, opțional, *PlotRange* care oferă specificații asupra intervalului în care variază coordonatele din grafic. În continuare desenăm graficul soluției determinate, expresia ei găsindu-se în locația `sol11[[1,1,2]]` din tabelul de date de ieșire.

$$\text{sol11}[[1, 1, 2]]$$

$$\frac{1}{1.03635 - 1.t + \text{ArcTan}[t]}$$

$$\text{gg1} = \text{Plot}[\text{sol11}[[1, 1, 2]], \{t, 0.5, 5\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{RGBColor}[0, 1, 0]]$$

14.1. ECUAȚII DIFERENȚIALE CU VARIABILE SEPARABILE



Schimbând condiția inițială, obținem o altă soluție a cărei grafic este desenat mai jos.

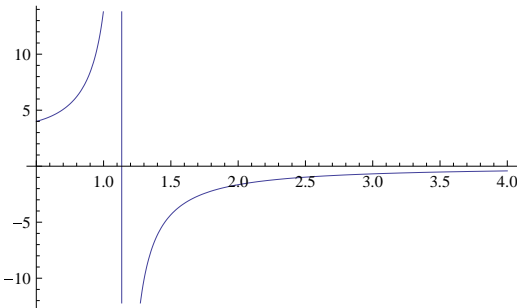
```
sol12 = DSolve[{eq1, x[0.5] == 4}, x[t], t]
```

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow \frac{1}{0.286352 - 1.t + \text{ArcTan}[t]} \right\} \right\}$$

```
sol12[[1, 1, 2]]
```

$$\frac{1}{0.286352 - 1.t + \text{ArcTan}[t]}$$

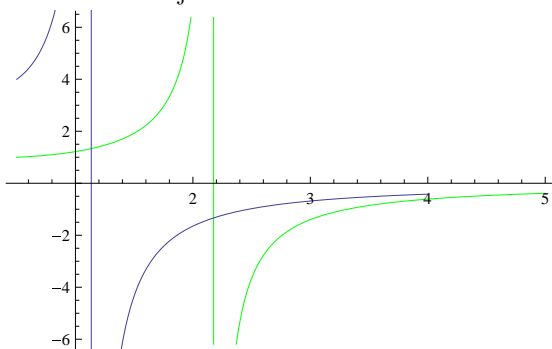
```
gg2 = Plot[sol12[[1, 1, 2]], {t, 0.5, 4}]
```



```
Show[gg1, gg2]
```

Desenăm ambele grafice pe același sistem de coordonate, aceasta

realizându-se cu ajutorul comenzii *Show*:



În continuare prezentăm și modul de rezolvare a aceleiași ecuații diferențiale cu variabile separabile urmând pașii de rezolvare studiați la cursul de ecuații diferențiale:

-separăm variabilele,

$$\text{mems1}[x_] = 1/x^2$$

$$\text{memd1}[t_] = t^2/(t^2 + 1)$$

$$\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{t^2}{1+t^2}$$

-integrăm fiecare membru,

$$p1 = \text{Integrate}[\text{mems1}[x], x]$$

$$p2 = \text{Integrate}[\text{memd1}[t], t]$$

$$-\frac{1}{x}$$

$$t - \text{ArcTan}[t]$$

-scriem soluția generală,

$$\text{sol3} = p1 - p2 == C$$

$$-t - \frac{1}{x} + \text{ArcTan}[t] == C$$

Obținem soluția sub formă explicită astfel:

Solve[p1 - p2 == C, x]

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{-C - t + \text{ArcTan}[t]} \right\} \right\}$$

Desenăm graficul soluției obținută sub formă implicită cu ajutorul comenzii *ContourPlot*. Observăm că graficul soluției scrisă sub forma $-t - \frac{1}{x} + \text{ArcTan}[t] == C$ pentru diferite valori ale lui C este același cu graficul curbelor de nivel ale suprafeței $-t - \frac{1}{x} + \text{ArcTan}[t]$, grafic care se trasează cu ajutorul comenzii *ContourPlot*. Valorile lui C pentru care sunt trasate graficele sunt specificate în tabelul etichetat *cval* precizat în opțiunea *Contours* \rightarrow *cval* din *ContourPlot*.

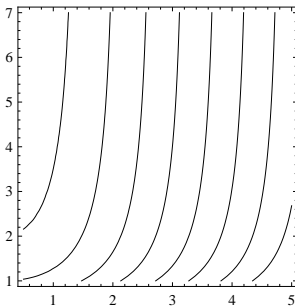
sol31 = p1 - p2;

cval = Table[C, {C, -4., 2., 0.5}]

{-4., -3.5, -3., -2.5, -2., -1.5, -1., -0.5, 0., 0.5, 1., 1.5, 2.}

ContourPlot[sol31, {t, 0.5, 5}, {x, 1, 7}, Contours \rightarrow cval,

ContourShading \rightarrow None]



14.2 Ecuații diferențiale omogene

Forma generală a unei ecuații diferențiale de ordin întâi omogenă este

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right) \quad (14.2.2)$$

unde f este o funcție continuă și omogenă de grad zero.

Alte forme ale ecuației omogene sunt

$$x'(t) = \frac{P(t, x)}{Q(t, x)}, \quad (14.2.3)$$

unde \mathcal{D} este o mulțime nevidă și deschisă din \mathbb{R}^2 și $P, Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue pe \mathcal{D} , cu $Q(t, x) \neq 0$ pe \mathcal{D} , omogene, având același grad de omogenitate în sens Euler, sau

$$P(t, x)dt - Q(t, x)dx = 0. \quad (14.2.4)$$

Rezolvarea ecuației diferențiale de ordin întâi omogenă se face efectuând schimbarea de funcție

$$x(t) = tu(t) \quad (14.2.5)$$

și se ajunge la o ecuație cu variabile separabile.

Exemplul 14.2.1 *Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale*

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \operatorname{tg}\frac{x(t)}{t}, t \neq 0, x(t) \neq k\frac{\pi}{2}t, k \in \mathbb{N}.$$

Clear[x, t]

eq4 = x'[t] == x[t]/t + Tan[x[t]/t]

```
sol4 = DSolve[eq4, x[t], t]
x'[t] == Tan [x[t]/t] + x[t]/t
{{x[t] -> tArcSin[e^C[1]t]}}
```

Exemplul 14.2.2 Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} - e^{-\frac{x(t)}{t}}, t \neq 0, k \in \mathbb{N}.$$

Să se traseze graficul soluției care satisface condiția inițială $x(1) = 1$.

Determinăm soluția generală: definim ecuația *eq5* și utilizăm *DSolve*.

```
eq5 = x'[t] == x[t]/t - Exp[x[t]/t]
sol5 = DSolve[eq5, x[t], t]
{{x[t] -> -tLog[-C[1] + Log[t]]}}
```

Impunem condiția inițială $x(1) = 1$ și determinăm soluția particulară.

```
sol5 = DSolve[{eq5, x[1] == 1}, x[t], t]
{{x[t] -> -tLog [1/e + Log[t]]}}
```

Observăm că soluția este definită pentru $t > 0$.

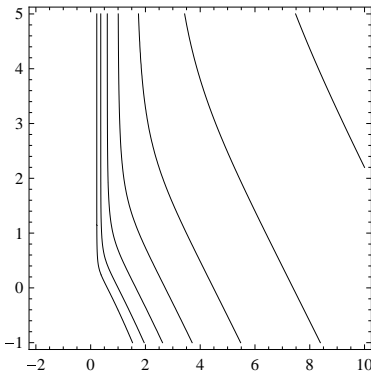
Trasăm graficul soluției generale pentru diferite valori ale constantei. Pentru aceasta punem în evidență constanta $C[1]$ din soluția generală. Formăm un tablou cu soluțiile obținute pentru diferite valori ale constantei și astfel putem utiliza comanda *ContourPlot*.

```
sol = Log[t] - Exp[-x/t]
```

```

-tLog [1/e + Log[t]]
sol51 = sol5[[1, 1, 2]] - x
-e^{-x/t} + Log[t]
cval1 = Table[C, {C, -5., 4., 0.5}];
ContourPlot[sol, {t, -2, 10}, {x, -1, 5}, Contours -> cval1,
ContourShading -> False]

```



Exemplul 14.2.3 *Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale omogene*

$$x'(t) = \frac{x^2(t)}{x^2(t) + tx(t)}, x^2 + tx \neq 0.$$

```
eq6 = x'[t] == x[t]^2/(tx[t] + x[t]^2);
```

```
DSolve[eq6, x[t], t]
{ { x[t] -> t / ProductLog[ e^{-C[1]t} ] } }
```

Folosind comanda *DSolve*, soluția obținută nu are o formă elegantă, ceea ce ne sugerează ideea de a urma pașii de rezolvare a ecuației omo-

gene:

-definim cele două funcții ale căror omogeneitate trebuie verificată,

$$\text{mem1}[t, x] = x^2$$

$$\text{mem2}[t, x] = -x^2 - tx$$

$$x^2$$

$$-tx - x^2$$

-verificăm dacă funcțiile sunt omogene de grad 1:

$$\text{mem1}[at, a x] == a \text{mem1}[t, x]$$

$$\text{mem2}[at, a x] == \text{Expand}[a \text{mem2}[t, x]]$$

$$a^2 x^2 == ax^2$$

$$-a^2 tx - a^2 x^2 == -atx - ax^2$$

Observăm că cele două funcții nu sunt omogene de grad unu. Testăm dacă sunt omogene de grad doi.

$$\text{mem1}[at, a x] == a^2 \text{mem1}[t, x]$$

$$\text{mem2}[at, a x] == \text{Expand}[a^2 \text{mem2}[t, x]]$$

True

True

Cele două funcții sunt omogene de grad doi.

-scriem ecuația diferențială sub forma (14.2.4) unde simbolul $Dt[t]$ corespunde lui dt și $Dt[x]$ corespunde lui dx ,

$$\text{eta1} = \text{mem1}[t, x]Dt[t] + \text{mem2}[t, x]Dt[x]$$

$$x^2Dt[t] + (-tx - x^2)Dt[x]$$

-facem schimbarea de funcție $x(t) = tu(t)$.

```
Clear[x,t,u]
```

```
x = t u
```

```
t u
```

Facem observația că pentru buna desfășurare a programului trebuie șterse valorile anterioare ale funcțiilor sau variabilelor, fapt realizat prin comanda *Clear*. De aceea recomandăm utilizarea comenzii, în special înaintea unor schimbări de variabile, pentru a evita obținerea unor rezultate eronate, dar și înaintea începerii unor aplicații noi care utilizează aceleași variabile.

```
eta2 = eta1/ExpandAll
```

```
-t2u3Dt[t] - t3uDt[u] - t3u2Dt[u]
```

-grupăm termenii relației anterioare după $Dt[t]$ și $Dt[x]$ cu ajutorul comenzii *Collect* și transformăm ecuația într-o ecuație cu variabile separabile. Pentru a rezolva ecuația o împărțim prin t^3u^3 , elemente care se află în locațiile tabelului de ieșire *eta3* și anume în *eta3[[2,1]]* și *eta3[[1,3]]*

```
eta3 = Collect[eta2, {t, Dt[t], Dt[u]}]
```

```
-t2u3Dt[t] + t3(-u - u2)Dt[u]
```

-integrăm ecuația cu variabile separabile. Pentru aceasta utilizăm comanda *Apart* care descompune o funcție rațională în fracții simple, iar comanda *Cancel* simplifică factorii comuni din fracții.

```
eta4 = Cancel[Apart[eta3/(eta3[[2, 1]]eta3[[1, 3]])]]
```

```
-  $\frac{Dt[t]}{t}$  -  $\frac{(1+u)Dt[u]}{u^2}$ 
```

```
eta4[[1, 1]]
```


$\text{eta4}[[1, 2]]$ -1 $\frac{1}{t}$ $\text{term1} = \text{Integrate}[\text{eta4}[[1, 1]]\text{eta4}[[1, 2]], \mathfrak{t}]$ $-\text{Log}[t]$ $\text{eta4}[[2, 1]]$ $\text{eta4}[[2, 2]]$ $\text{eta4}[[2, 3]]$ -1 $\frac{1}{u^2}$ $1 + u$ $\text{term2} = \text{Integrate}[\text{eta4}[[2, 1]]\text{eta4}[[2, 2]]\text{eta4}[[2, 3]], u]$ $\frac{1}{u} - \text{Log}[u]$

Revenim cu schimbarea de variabilă $u = \frac{x}{t}$ pentru a obține soluția generală a ecuației inițiale.

 $\text{Clear}[u, x, \mathfrak{t}]$ $u = x/t$ $\frac{x}{t}$ $\text{term1} == -\text{term2} + C$ $-\text{Log}[t] == C - \frac{t}{x} + \text{Log}\left[\frac{x}{t}\right]$

14.3 Ecuații cu diferențială totală exactă

Fie \mathcal{D} o mulțime nevidă și deschisă din \mathbb{R}^2 și $P, Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții de clasă \mathcal{C}^1 pe \mathcal{D} , cu $Q(t, x) \neq 0$ pe \mathcal{D} . O ecuație de forma

$$P(t, x(t))dt + Q(t, x(t))dx(t) = 0. \quad (14.3.6)$$

se numește ecuație cu diferențială totală exactă dacă membrul întâi este diferențiala unei funcții F , adică satisface condiția

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial P}{\partial x}(t, x), (t, x) \in \mathcal{D}. \quad (14.3.7)$$

Soluția generală este definită implicit de $F(t, x(t)) = C$.

Exemplul 14.3.1 *Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale*

$$(e^t + x(t) + \sin x(t))dt + (e^{x(t)} + t + t \cos x(t))dx(t) = 0, e^x + t + t \cos x \neq 0.$$

Definim ecuația și utilizăm comanda *DSolve*.

$$ec7 = -(\text{Exp}[t] + x[t] + \text{Sin}[x[t]])/(\text{Exp}[x[t]] + t + t\text{Cos}[x[t]]);$$

$$\text{DSolve}[ec7, x[t], t]$$

$$\text{DSolve}\left[\frac{-e^t - \text{Sin}[x[t]] - x[t]}{e^{x[t]} + t + t\text{Cos}[x[t]]}, x[t], t\right]$$

Se observă că aplicarea comenzii *DSolve* nu a avut succes, a fost re-crisă ecuația. Pentru a o rezolva urmăm pașii corespunzători acestui tip de ecuație.

-definim cei doi membri ai ecuației și verificăm condiția (14.3.7).

$$p[t_, x_] = \text{Exp}[t] + x + \text{Sin}[x]$$

$$q[t_, x_] = \text{Exp}[x] + t + t\text{Cos}[x]$$

$$e^t + x + \text{Sin}[x]$$

$$e^x + t + t\text{Cos}[x]$$

$$D[p[t, x], x] == D[q[t, x], t]$$

True

-integrăm unul din cei doi membrii, de obicei cel a cărui integrală se poate calcula mai ușor,

$$\text{et1} = \text{Integrate}[p[t, x], t]$$

$$e^t + tx + t\text{Sin}[x]$$

-adunăm o funcție care depinde numai de x , funcția $g(x)$, deoarece integrarea s-a făcut în raport cu variabila t . Determinăm funcția g . Pentru aceasta derivăm în raport cu x , egalăm cu celălalt membru al ecuației, obținem valoarea lui g' și integrăm expresia obținută

$$\text{et2} = D[\text{et1} + g[x], x]$$

$$t + t\text{Cos}[x] + g'[x]$$

$$\text{et3} = \text{Solve}[\text{et2} == q[t, x], g'[x]]$$

$$\{\{g'[x] \rightarrow e^x\}\}$$

$$\text{et4} = \text{Integrate}[g'[x]/.\text{et3}[[1]], x]$$

$$e^x$$

-scriem soluția generală,

$$\text{solgen} = \text{et1} + \text{et4} == C$$

$$e^t + e^x + tx + t\text{Sin}[x] == C$$

$$\text{solgen}[[1]]$$

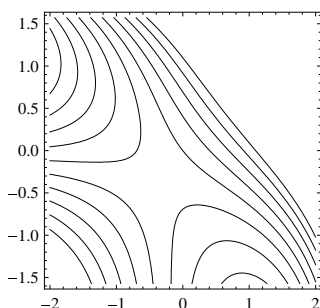
$$e^t + e^x + tx + t\text{Sin}[x]$$

Observăm că în acest caz, curbele de nivel ale funcției $e^t + e^x + tx + \sin x$ corespund cu graficele soluției $e^t + e^x + tx + \sin(x) = C$ pentru diferite valori ale lui C . Rezultă că putem utiliza comanda *ContourPlot* pentru a trasa graficele. Construim tabelul *cval2* utilizat în *ContourPlot*.

```
cval2 = Table[C, {C, -5., 4., 0.5}];
```

```
ContourPlot[solgen[[1]], {t, -2, 2}, {x, -Pi/2, Pi/2}, Contours -> cval2,
```

```
ContourShading -> None]
```



14.4 Ecuația diferențială de ordin întâi liniară

O ecuație diferențială de ordin întâi liniară este o ecuație de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \quad (14.4.8)$$

unde $a, b : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe \mathbb{I} . Dacă $b \equiv 0$ pe \mathbb{I} ecuația se numește liniară și omogenă, iar în caz contrar liniară și neomogenă.

Soluția generală a ecuației (14.4.8), în condițiile în care $a, b : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$

sunt funcții continue pe \mathbb{I} , este de forma:

$$x(t, C) = e^{\int a(t)dt} \left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt} dt \right) \quad (14.4.9)$$

Exemplul 14.4.1 *Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale:*

$$x'(t) = x(t)\cot t + 2t \sin t$$

și să se traseze graficele pentru diferite valori ale constantei.

Determinăm soluția generală cu ajutorul comenzii *DSolve*.

```
Clear[x, t, u]
ec8 = x'[t] == x[t]Cot[t] + 2tSin[t];
sol8 = DSolve[ec8, x[t], t]
{{x[t] -> t^2Sin[t] + C[1]Sin[t]}}
```

sol8[[1, 1, 2]]

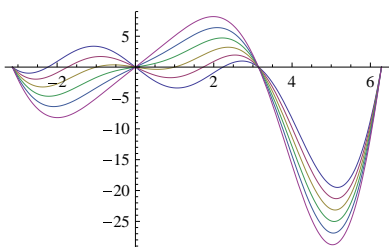
$$t^2\text{Sin}[t] + C[1]\text{Sin}[t]$$

Pentru a trasa graficele printru diferite valori ale constantei definim soluția ca o funcție de C .

```
y[C_] = t^2Sin[t] + CSin[t]
CSin[t] + t^2Sin[t]
```

Se face un tabel cu soluțiile ecuației diferențiale pentru diferite valori ale constantei C . În acest caz constanta C ia valori între -5 și 5 , cu pasul 1 .

```
solg = Table[y[C], {C, -5, 5, 1}];
Plot[Evaluate[solg], {t, -Pi, 2Pi}, AxesOrigin -> {0, 0}]
```



14.5 Ecuatii diferențiale care admit factor integrant

În general dacă condiția (14.3.7) nu este satisfăcută, ecuația (14.3.6) poate fi redusă, în anumite cazuri, la o ecuație cu diferențială exactă. O metodă de reducere a ecuației (14.3.6) la o ecuație cu diferențială totală exactă este metoda factorului integrant.

Dacă ecuația (14.3.6) nu este cu diferențială totală exactă, se caută o funcție $\mu : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de clasă \mathcal{C}^1 cu $\mu(t, x) \neq 0, \forall (t, x) \in \mathcal{D}$, numită factor integrant, astfel încât ecuația

$$\mu(t, x)P(t, x)dt + \mu(t, x)Q(t, x)dx = 0$$

să devină o ecuație cu diferențială totală exactă.

Pentru a determina un factor integrant calculăm expresia

$$\frac{1}{Q(t, x)} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) \right). \quad (14.5.10)$$

Dacă expresia obținută este numai funcție de t , o notăm cu $f(t)$. În acest caz putem determina un factor integrant μ ca funcție numai de variabila t . El este soluție a ecuației diferențiale $\mu'(t) = f(t)\mu(t)$. Dacă (14.5.10) nu este numai funcție de t , încercăm cea de a doua variantă.

Calculăm expresia

$$\frac{1}{P(t, x)} \left(\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) \right) \quad (14.5.11)$$

Dacă expresia obținută este numai funcție de x , o notăm cu $g(x)$. În acest caz putem determina un factor integrant μ ca funcție numai de variabila x . El este soluție a ecuației diferențiale $\mu'(x) = k(x)\mu(x)$. Nu luăm în considerare alte situații.

Exemplul 14.5.1 *Să se determine soluția generală a ecuației*

$$(x(t) + \ln t) dt - t dx(t) = 0, t > 0.$$

Dacă scriem ecuația de forma

$$x'(t) = \frac{x(t) + \ln t}{t}$$

ecuația poate fi privită ca o ecuație de ordin întâi liniară și se rezolvă în cele ce urmează.

$$\text{ec10} = \mathbf{x}'[\mathbf{t}] == (\mathbf{x}[\mathbf{t}] + \text{Log}[\mathbf{t}])/\mathbf{t}$$

$$\text{DSolve}[\text{ec10}, \mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}]$$

$$\mathbf{x}'[\mathbf{t}] == \frac{\text{Log}[\mathbf{t}] + \mathbf{x}[\mathbf{t}]}{\mathbf{t}}$$

$$\left\{ \left\{ \mathbf{x}[\mathbf{t}] \rightarrow \mathbf{t}C[1] + \mathbf{t} \left(-\frac{1}{\mathbf{t}} - \frac{\text{Log}[\mathbf{t}]}{\mathbf{t}} \right) \right\} \right\}$$

Aceeași ecuație poate fi privită și ca o ecuație diferențială de forma (14.3.6). Se pun în evidență cei doi membri și se verifică condiția (14.3.7).

$$\text{ms}[\mathbf{t}, \mathbf{x}] = \mathbf{x} + \text{Log}[\mathbf{t}]$$

$$\text{md}[\mathbf{t}, \mathbf{x}] = -\mathbf{t}$$

$$\mathbf{x} + \text{Log}[\mathbf{t}]$$

$$-\mathbf{t}$$

$$D[\text{ms}[\mathbf{t}, \mathbf{x}], \mathbf{x}] == D[\text{md}[\mathbf{t}, \mathbf{x}], \mathbf{t}]$$

False

Nu este o ecuație cu diferențială totală exactă. Se încearcă determinarea unui factor integrant de forma(14.5.10)

$$\text{ff}[\mathbf{t}_-] = (D[\text{ms}[\mathbf{t}, \mathbf{x}], \mathbf{x}] - D[\text{md}[\mathbf{t}, \mathbf{x}], \mathbf{t}])/\text{md}[\mathbf{t}, \mathbf{x}] - \frac{2}{t}$$

Expresia calculată este numai funcție de t . Determinăm factorul integrant.

$$\text{DSolve}\{\{\text{mi}'[\mathbf{t}] == \text{mi}[\mathbf{t}]\text{ff}[\mathbf{t}], \text{mi}[1] == 1\}, \text{mi}[\mathbf{t}], \mathbf{t}\}$$

$$\{\{\text{mi}[t] \rightarrow \frac{1}{t^2}\}\}$$

$$\text{miu}[\mathbf{t}_-]:=1/\mathbf{t}^2$$

$$\text{msfc}[\mathbf{t}_-, \mathbf{x}_-] = (\mathbf{x} + \text{Log}[\mathbf{t}])\text{miu}[\mathbf{t}]$$

$$\text{mdfc}[\mathbf{t}_-, \mathbf{x}_-] = -\mathbf{t}\text{miu}[\mathbf{t}]$$

$$\frac{x+\text{Log}[t]}{t^2}$$

$$-\frac{1}{t}$$

$$D[\text{msfc}[\mathbf{t}, \mathbf{x}], \mathbf{x}] == D[\text{mdfc}[\mathbf{t}, \mathbf{x}], \mathbf{t}]$$

True

Ecuația astfel obținută este o ecuație cu diferențială exactă. Urmăm aceiași pași ca la ecuația cu diferențială exactă.

$$\text{et10} = \text{Integrate}[\text{msfc}[\mathbf{t}, \mathbf{x}], \mathbf{t}]$$

$$-\frac{1}{t} - \frac{x}{t} - \frac{\text{Log}[t]}{t}$$

$$\text{et20} = D[\text{et10} + \mathbf{g}[\mathbf{x}], \mathbf{x}]$$

$$-\frac{1}{t} + g'[x]$$

$$\text{et30} = \text{Solve}[\text{et20} == \text{mdfc}[t, x], g'[x]]$$

$$\{\{g'[x] \rightarrow 0\}\}$$

$$\text{et40} = \text{Integrate}[g'[x]/.\text{et30}[[1]], x]$$

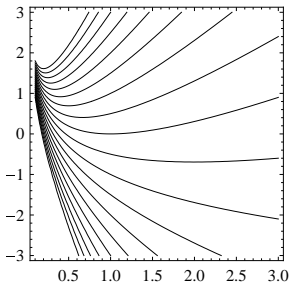
0

$$\text{solgen} = \text{et10} + \text{et40} == C$$

$$-\frac{1}{t} - \frac{x}{t} - \frac{\text{Log}[t]}{t} == C$$

$$\text{cval4} = \text{Table}[C, \{C, -5., 4., 0.5\}];$$

$$\text{ContourPlot}[\text{et10} + \text{et40}, \{t, 0.1, 3\}, \{x, -3, 3\}, \text{Contours} \rightarrow \text{cval4}]$$



14.6 Traiectorii ortogonale

Reamintim că două drepte, d_1 și d_2 care au pantele m_1 și m_2 sunt perpendiculare (ortogonale) dacă pantele lor satisfac relația $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. Analog, două curbe C_1 și C_2 sunt ortogonale într-un punct dacă tangentele lor în punctul respectiv sunt perpendiculare.

Punem problema de a determina traiectorii în plan ortogonale pe curbe date.

Exemplul 14.6.1 *Să se determine traiectoriile ortogonale familiei de curbe*

$$x^2 - y^2 = C.$$

Urmărim următoarele etape:

-determinăm ecuația diferențială satisfăcută de familia de curbe dată,

Clear[x, t, y, u]

sol1 = Solve[D[x^2 - y[x]^2 == C, x], y'[x]]

$$\left\{ \left\{ y'[x] \rightarrow \frac{x}{y[x]} \right\} \right\}$$

-determinăm ecuația diferențială satisfăcută de familia de traiectorii ortogonale, $y'(x) = x/y(x)$,

sol1[[1, 1, 2]]

$$\frac{x}{y[x]}$$

ort2 = -1/sol1[[1, 1, 2]]

$$\frac{x}{y[x]}$$

-rezolvăm ecuația diferențială cu variabile separabile determinată, $y'(x) = x/y(x)$,

dd1 = DSolve[y'[x] == ort2, y[x], x]

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{C[1]}{x} \right\} \right\}$$

Familia de traiectorii ortogonale pe $x^2 - y^2 = C$ este $xy = C1$.

Trasăm graficele pe același sistem de axe de coordonate.

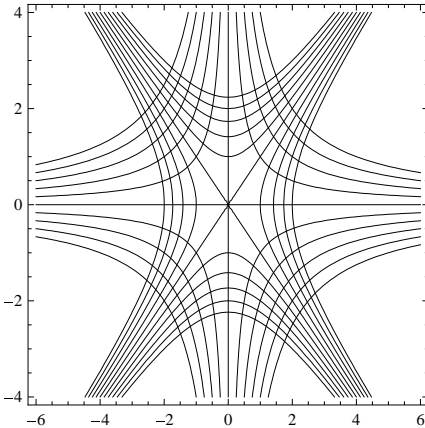
cval51 = Table[c, {c, -5., 4., 1}];

d1 = ContourPlot[yx, {x, -6, 6}, {y, -4, 4}, ContourShading -> False,

```

Contours → cval51];
d2 = ContourPlot[x^2 - y^2, {x, -6, 6}, {y, -4, 4},
ContourShading → False,
Contours → cval51];
Show[d1, d2]

```



Exemplul 14.6.2 *Să se determine traiectoriile ortogonale curbei $x^2 - 4xy(x) + y^2(x) = C$.*

Urmărim etapele din exemplul anterior.

```

Clear[x, t, y, u]
sol11 = Solve[D[x^2 - 4x y[x] + y[x]^2 == C, x], y'[x]]
{ { { y'[x] →  $\frac{x-2y[x]}{2x-y[x]}$  } } }
sol11[[1, 1, 2]]
 $\frac{x-2y[x]}{2x-y[x]}$ 

```

$$\text{ort21} = -1/\text{sol11}[[1, 1, 2]]$$

$$-\frac{2x-y[x]}{x-2y[x]}$$

$$y'[x] == \text{ort21}$$

$$y'[x] == -\frac{2x-y[x]}{x-2y[x]}$$

Ecuția diferențială obținută, o ecuație omogenă, nu poate fi rezolvată cu ajutorul comenzii *DSolve*. Ecuția diferențială obținută este

$$y'(x) = \frac{y(x) - 2x}{x - 2y(x)}.$$

Se urmăresc pașii de rezolvare a acestui tip de ecuație, prezentați anterior: se face schimbarea de variabilă $u(x) = \frac{y(x)}{x}$, se obține o ecuație cu variabile separabile,

$$\frac{1 - 2u}{2(u^2 - 1)} du = \frac{dx}{x},$$

se integrează,

$$-\ln(1 - u) - 3/4 \ln(1 + u) = \ln x + \ln C$$

și se revine la vechile variabile,

$$C = x/|x|((x - y)(x + y)^3)^{1/4}.$$

$$\text{Solve}[\text{xu}' + \text{u} == -(2 - \text{u})/(1 - 2\text{u}), \text{u}']$$

$$\left\{ \left\{ u' \rightarrow -\frac{2(-1+u^2)}{(-1+2u)x} \right\} \right\}$$

$$\text{integ1} = \text{Integrate}[(1 - 2\text{u})/(2(\text{u}^2 - 1)), \text{u}]$$

$$\frac{1}{4}(-\text{Log}[1 - u] - 3\text{Log}[1 + u])$$

$$\text{integ2} = \text{Integrate}[1/\text{x}, \text{x}]$$

$$\text{Log}[x]$$

$$\text{Clear}[\text{x}, \text{t}, \text{y}, \text{u}]$$

$$\text{u} = \text{y}/\text{x}$$

$$\frac{y}{x}$$

etap = integ1

$$-\frac{1}{4}\text{Log}\left[1 - \frac{y}{x}\right] - \frac{3}{4}\text{Log}\left[1 + \frac{y}{x}\right]$$

solgen = integ2 - etap == Log[C]

$$\text{Log}[x] + \frac{1}{4}\left(\text{Log}\left[1 - \frac{y}{x}\right] + 3\text{Log}\left[1 + \frac{y}{x}\right]\right) == \text{Log}[c]$$

Solve[integ2 - etap == Log[c], c]

$$\left\{ \left\{ c \rightarrow x \left(\frac{x-y}{x}\right)^{1/4} \left(\frac{x+y}{x}\right)^{3/4} \right\} \right\}$$

Am obținut soluția generală. Am explicitat constanta c pentru a putea trasa graficele folosind comanda ContourPlot.

cval5 = Table[c, {c, -5., 4., 1}];

gp1 = ContourPlot[x² - 4x y + y², {x, -6, 6}, {y, -4, 4},

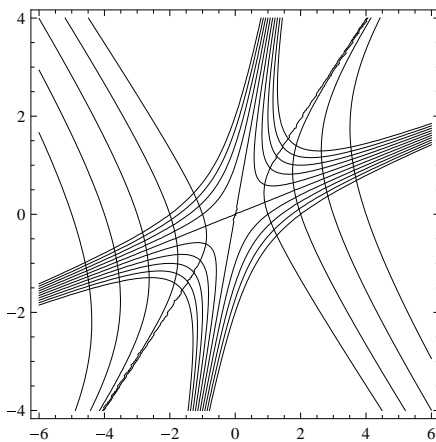
ContourShading → False, Contours → cval5];

gp2 = ContourPlot[x/Abs[x] ((x - y)(x + y)³)^{1/4}, {x, -6, 6},

{y, -4, 4}, ContourShading → False, Contours → cval5];

Show[gp1, gp2]

14. ECUAȚII DIFERENȚIALE INTEGRABILE PRIN CUADRATURI



Ecuatii diferențiale liniare de ordin n cu coeficienți constanți

O ecuație diferențială liniară de ordin n cu coeficienți constanți este o ecuație de forma:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t) \quad (15.0.1)$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, f este o funcție continuă de la un interval nevid deschis \mathbb{I} în \mathbb{R} , iar $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ funcția necunoscută.

Soluția generală a ecuației (15.0.1) este formată din suma dintre soluția generală a ecuației omogene și o soluție particulară a ecuației neomogene, adică de forma

$$x(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) + x_p(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, \quad (15.0.2)$$

unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt n soluții liniar independente ale ecuației omo-

gene iar x_p este o soluție particulară a ecuației neomogene.

Exemplul 15.0.3 a) Să se verifice că funcțiile $\{e^{-3t}, e^{-t}, e^t\}$ sunt liniar independente.

b) Să se determine soluția generală a ecuației

$$x'''(t) + 3x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 0.$$

a) Verificarea liniarei independențe se face calculând wronskianul acestor funcții.

$$\text{linia1} = \{\text{Exp}[-3\mathfrak{t}], \text{Exp}[-\mathfrak{t}], \text{Exp}[\mathfrak{t}]\}$$

$$\text{linia2} = \text{D}[\text{linia1}, \mathfrak{t}]$$

$$\text{linia3} = \text{D}[\text{linia2}, \mathfrak{t}]$$

$$\{e^{-3t}, e^{-t}, e^t\}$$

$$\{-3e^{-3t}, -e^{-t}, e^t\}$$

$$\{9e^{-3t}, e^{-t}, e^t\}$$

$$\text{matw} = \{\text{linia1}, \text{linia2}, \text{linia3}\};$$

$$\text{matw} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} & e^t \\ -3e^{-3t} & -e^{-t} & e^t \\ 9e^{-3t} & e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$$

$$\text{wrons} = \text{Det}[\text{matw}]$$

$$16e^{-3t}$$

Deoarece wronskianul este diferit de zero pe mulțimea numerelor reale, rezultă că funcțiile sunt liniar independente.

b) Rezolvăm ecuația.

$$\text{ecn3} = \mathbf{x}'''[\mathbf{t}] + 3\mathbf{x}''[\mathbf{t}] - \mathbf{x}'[\mathbf{t}] - 3\mathbf{x}[\mathbf{t}] == 0$$

$$\text{DSolve}[\text{ecn3}, \mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}]$$

$$-3x[t] - x'[t] + 3x''[t] + x^{(3)}[t] == 0$$

$$\{\{x[t] \rightarrow e^{-3t}C[1] + e^{-t}C[2] + e^tC[3]\}\}$$

Impunem condiții inițiale și obținem soluția unică a problemei Cauchy.

$$\begin{cases} x'''(t) + 3x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 0, \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -1. \end{cases}$$

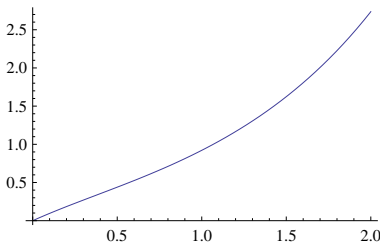
$$\text{ecn2} = \mathbf{x}'''[\mathbf{t}] + 3\mathbf{x}''[\mathbf{t}] - \mathbf{x}'[\mathbf{t}] - 3\mathbf{x}[\mathbf{t}] == 0;$$

$$\text{sol2} = \text{DSolve}[\{\text{ecn2}, \mathbf{x}[0]==0, \mathbf{x}'[0]==1, \mathbf{x}''[0]==-1\}, \mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}]$$

$$\{\{x[t] \rightarrow \frac{1}{8}e^{-3t}(-1 - 2e^{2t} + 3e^{4t})\}\}$$

Trasăm graficul soluției determinate.

$$\text{Plot}[\mathbf{x}[\mathbf{t}]/.\text{sol2}, \{\mathbf{t}, 0, 2\}]$$



Prezentăm exemple de rezolvare a ecuațiilor diferențiale omogene clasificate după natura rădăcinilor polinomului caracteristic.

Cazul rădăcinilor reale și distincte este prezentat în exemplul 15.0.3.

Exemplul 15.0.4 *Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor*

a) $x'''(t) - 3x''(t) + 3x'(t) - x(t) = 0$.

b) $x^{(V)}(t) - x^{(IV)}(t) - x'(t) + x(t) = 0$, $x''''(t) - x''(t) + x(t) = 0$.

c) $x^{(IV)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 0$.

a) cazul rădăcinilor reale și multiple,

$$\text{ecn4} = x'''[t] - 3x''[t] + 3x'[t] - x[t] == 0;$$

$$\text{DSolve}[\text{ecn4}, x[t], t]$$

$$\{\{x[t] \rightarrow e^t C[1] + e^t t C[2] + e^t t^2 C[3]\}\}$$

b) cazul rădăcinilor complexe simple,

$$\text{ecn5} = x''''[t] - x'''[t] - x'[t] + x[t] == 0;$$

$$\text{DSolve}[\text{ecn5}, x[t], t]$$

$$\{\{x[t] \rightarrow e^{-t} C[3] + e^t C[4] + e^t t C[5] + C[1] \text{Cos}[t] + C[2] \text{Sin}[t]\}\}$$

$$\text{eqn51} = x''''[t] - x'''[t] + x[t] == 0;$$

$$\text{DSolve}[\text{eqn51}, x[t], t]$$

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow e^{\frac{\sqrt{3}t}{2}} C[2] \text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right] + e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}} C[4] \text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right] + e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}} C[1] \text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right] + e^{\frac{\sqrt{3}t}{2}} C[3] \text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right] \right\} \right\}$$

c) cazul rădăcinilor complexe multiple,

$$\text{eqn5} = x''''[t] + 2x''[t] + x[t] == 0;$$

$$\text{DSolve}[\text{eqn5}, x[t], t]$$

$$\{\{x[t] \rightarrow C[1] \text{Cos}[t] + t C[2] \text{Cos}[t] + C[3] \text{Sin}[t] + t C[4] \text{Sin}[t]\}\}$$

Exemplul 15.0.5 Să se rezolve ecuația neomogenă de mai jos și să se traseze graficul soluției problemei Cauchy.

$$x''(t) + x(t) = \frac{1}{\cos t}, t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

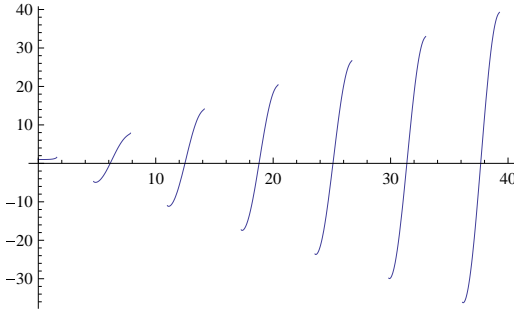
$$x(0) = 1, x'(0) = 0.$$

$$\text{ecn6} = \mathbf{x}''[\mathbf{t}] + \mathbf{x}[\mathbf{t}] == 1/\text{Cos}[\mathbf{t}];$$

$$\text{sol6} = \text{DSolve}[\{\text{ecn6}, \mathbf{x}[0] == 1, \mathbf{x}'[0] == 0\}, \mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}]$$

$$\{\{x[t] \rightarrow \text{Cos}[t] + \text{Cos}[t]\text{Log}[\text{Cos}[t]] + t\text{Sin}[t]\}\}$$

$$\text{Plot}[x[t]/.\text{sol6}, \{\mathbf{t}, 0, 40\}]$$



Analiza graficului ne permite să tragem concluzii asupra mulțimii pe care ecuația diferențială nu are soluții.

Exemplul 15.0.6 Să se rezolve ecuațiile diferențiale neomogene și să se traseze graficele în cazurile c), d) și e).

$$a) x^{(IV)}(t) - 4x''(t) = 8t^2,$$

$$b) x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = t^2 e^{3t},$$

$$c) x''(t) + \frac{1}{4}x(t) = \text{cosec} \frac{t}{2}, \quad t \neq 2k\pi,$$

$$d) x''(t) + x(t) = \text{tg} t, \quad t \neq (2k+1)\pi/2,$$

$$e) x''(t) + x(t) = \frac{1}{\cos 2t \sqrt{\cos 2t}}, \quad t \in (2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}.$$

a) $\text{ecn7} = x''''[t] - 4x''[t] == 8t^2;$

$\text{DSolve}[\text{ecn7}, x[t], t]$

$\{ \{ x[t] \rightarrow \frac{1}{6} (-3t^2 - t^4 + \frac{3}{2}e^{2t}C[1] + \frac{3}{2}e^{-2t}C[2]) + C[3] + tC[4] \} \}$

b) $\text{ecn8} = x''[t] - 6x'[t] + 9x[t] == t^2\text{Exp}[3t];$

$\text{DSolve}[\text{ecn8}, x[t], t]$

$\{ \{ x[t] \rightarrow \frac{1}{12}e^{3t}t^4 + e^{3t}C[1] + e^{3t}tC[2] \} \}$

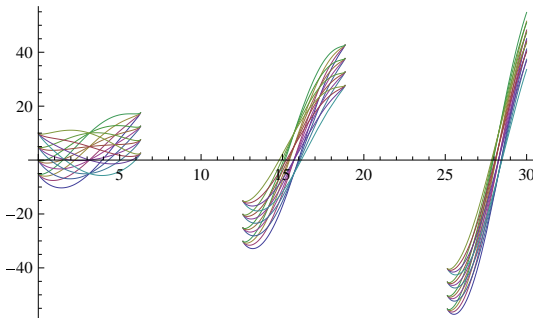
c) $\text{ecn9} = x''[t] + 1/4x[t] == \text{Csc}[t/2];$

$\text{sol9} = \text{DSolve}[\text{ecn9}, x[t], t]$

$\{ \{ x[t] \rightarrow C[1]\text{Cos}[\frac{t}{2}] + C[2]\text{Sin}[\frac{t}{2}] - 2(t\text{Cos}[\frac{t}{2}] - 2\text{Log}[\text{Sin}[\frac{t}{2}]]\text{Sin}[\frac{t}{2}]) \} \}$

$\text{mgraf} = \text{Table}[\text{sol9}[[1, 1, 2]] /. \{ C[1] \rightarrow i, C[2] \rightarrow j \}, \{ i, -5, 10, 5 \}, \{ j, -5, 10, 5 \}];$

$\text{Plot}[\text{Evaluate}[\text{mgraf}], \{ t, 0, 15 \}]$



Observăm că ecuația nu are soluție pe intervalul pe care $\ln(\sin(t/2))$ nu este definit.

d) `Clear[C1, C2, x, t, u1, u2]`

`ecn11 = x''[t] + x[t] == Tan[t];`

`sol11 = DSolve[{ecn11, x[0] == 0, x'[0] == 0}, x[t], t]`

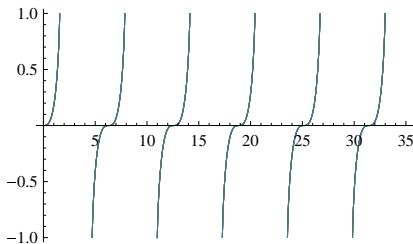
`{{x[t] → Cos[t]Log[Cos[$\frac{t}{2}$]] - Sin[$\frac{t}{2}$]] - Cos[t]Log[Cos[$\frac{t}{2}$]] + Sin[$\frac{t}{2}$]] + Sin[t]}`

`sol11[[1, 1, 2]]`

`Cos[t]Log [Cos [$\frac{t}{2}$]] - Sin [$\frac{t}{2}$]] - Cos[t]Log [Cos [$\frac{t}{2}$]] + Sin [$\frac{t}{2}$]] + Sin[t]`

`mgraf1 = Table[sol11[[1, 1, 2]]/.{C[1]->i, C[2] → j}, {i, -1, 1, 1}, {j, -1, 1, 1}];`

`Plot[Evaluate[mgraf1], {t, 0, 35}]`



e) `Clear[x, t, u1, u2, x1, x2]`

`ecn12 = x''[t] + x[t] == 1/(Cos[2t]Sqrt[Cos[2t]]);`

`DSolve[ecn12, x[t], t]`

`{{ {x[t] → C[1]Cos[t] + C[2]Sin[t] + $\frac{-\text{Cos}[t]^2 + \text{Sin}[t]^2}{\sqrt{\text{Cos}[2t]}}$ } }`

Rezolvăm ecuația folosind metoda variației constantelor:

-rezolvăm ecuația omogenă, verificăm dacă soluțiile găsite formează un sistem fundamental de soluții și scriem soluția generală a ecuației omogene,

$$\text{ecn14} = \mathbf{x}''[\mathbf{t}] + \mathbf{x}[\mathbf{t}] == 0;$$

$$\text{DSolve}[\text{ecn14}, \mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}]$$

$$\{\{x[t] \rightarrow C[1]\text{Cos}[t] + C[2]\text{Sin}[t]\}\}$$

$$\text{wron} = \text{Det}[\{\{x1[\mathbf{t}], x2[\mathbf{t}]\}, \{x1'[\mathbf{t}], x2'[\mathbf{t}]\}\}] // \text{Simplify}$$

1

-aplicăm metoda variației constantelor, rezolvăm sistemul corespunzător,

$$\mathbf{f}[\mathbf{t}_.] = 1/(\text{Cos}[2\mathbf{t}]\text{Sqrt}[\text{Cos}[2\mathbf{t}]])$$

$$x1[\mathbf{t}_.] = \text{Cos}[\mathbf{t}]$$

$$x2[\mathbf{t}_.] = \text{Sin}[\mathbf{t}]$$

$$\frac{1}{\text{Cos}[2t]^{3/2}}$$

$$\text{Cos}[t]$$

$$\text{Sin}[t]$$

$$\text{sol14} = \text{Solve}[\{x1[\mathbf{t}]u1'[\mathbf{t}] + x2[\mathbf{t}]u2'[\mathbf{t}] == 0, x1'[\mathbf{t}]u1'[\mathbf{t}] + x2'[\mathbf{t}]$$

$$u2'[\mathbf{t}] == \mathbf{f}[\mathbf{t}]\}, \{u1'[\mathbf{t}], u2'[\mathbf{t}]\}]$$

$$\left\{ \left\{ u1'[t] \rightarrow -\frac{\text{Sin}[t]}{\text{Cos}[2t]^{3/2}(\text{Cos}[t]^2 + \text{Sin}[t]^2)}, u2'[t] \rightarrow \frac{\text{Cos}[t]}{\text{Cos}[2t]^{3/2}(\text{Cos}[t]^2 + \text{Sin}[t]^2)} \right\} \right\}$$

-integrăm soluțiile sistemului,

$$\text{sol14}[[1, 1, 2]]$$

$$\text{sol14}[[1, 2, 2]]$$

$$-\frac{\text{Sin}[t]}{\text{Cos}[2t]^{3/2}(\text{Cos}[t]^2+\text{Sin}[t]^2)}$$

$$\frac{\text{Cos}[t]}{\text{Cos}[2t]^{3/2}(\text{Cos}[t]^2+\text{Sin}[t]^2)}$$

u1[t_] = Integrate[sol14[[1, 1, 2]], t]

u2[t_] = Integrate[sol14[[1, 2, 2]], t]

$$-\frac{\text{Cos}[t]}{\sqrt{\text{Cos}[2t]}}$$

$$\frac{\text{Sin}[t]}{\sqrt{\text{Cos}[2t]}}$$

-scriem soluția generală,

solgen1 = x[t] = C[1]x1[t] + C[2]x2[t] + x1[t]u1[t] + x2[t]u2[t]

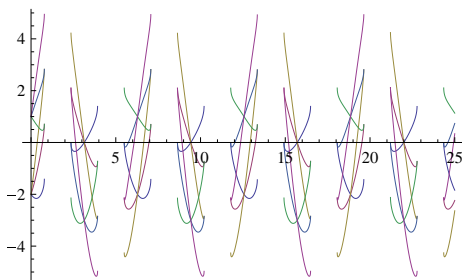
//Simplify

C[1]Cos[t] - √Cos[2t] + C[2]Sin[t]

-trasăm graficul soluției pentru diferite valori ale constantei,

mgraf2 = Table[x[t]/.{C[1]->i, C[2] -> j}, {i, -1, 4, 3}, {j, -1, 5, 3}];

Plot[Evaluate[mgraf2], {t, 0, 25}]



Aproximări numerice pentru soluțiile ecuațiilor diferențiale se pot obține cu ajutorul comenzii *NDSolve*. Această comandă se folosește dacă nu s-a putut găsi soluția ecuației diferențiale cu ajutorul comenzii *DSolve* sau cu metode specifice teoriei ecuațiilor diferențiale combinate

cu Mathematica. Utilizând această comandă se obține o aproximație a ecuației diferențiale pe intervalul pe care dorim. Este indicat să se studieze în prealabil existența și unicitatea soluției ecuației pe intervalul specificat. Rezultatul aproximării este dat în termenii de *InterpolatingFunction*.

Exemplul 15.0.7 *Să se aproximeze soluția ecuației diferențiale*

$$x'(t) = \sin(2t - x(t)), x(0) = 1.$$

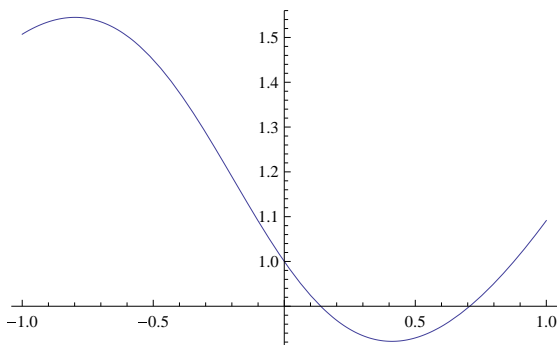
Să se traseze graficul soluției aproximative și să se calculeze valoarea în punctul $t = -0.5$.

Analizăm existența și unicitatea soluției. Considerăm domeniul $[-2, 2] \times [-1, 1]$. Funcția din membrul al doilea, $f(t, x) = \sin(t - x)$, este continuă pe $[-2, 2] \times [-1, 1]$. Deoarece $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = -\cos(t - x)$, $|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}| \leq 1$ atunci funcția f satisface condiția Lipschitz având constanta egală cu 1. Soluția ecuației diferențiale există și este unică pe intervalul $[-1, 1]$, $\min\{2, 1\} = 1$.

```
sol0 = NDSolve[{x'[t] == Sin[2t - x[t]], x[0] == 1}, x[t], {t, -1, 1}]
```

```
{{x[t] -> InterpolatingFunction[{{-1., 1.}}, <>][t]}}
```

```
Plot[x[t]/.sol0, {t, -1, 1}]
```



Se poate obține și valoarea soluției aproximative într-un punct prin secvența

```
approxSolution = x[t]/.NDSolve[{x'[t] == Sin[2t - x[t]], x[0] == 1},  
x[t], {t, -1, 1}, WorkingPrecision -> 25]/.t -> -0.5  
{1.45023}
```

* * *

Sisteme diferențiale de ordin întâi cu coeficienți constanți

16.1 Rezolvarea sistemelor diferențiale liniare de ordin întâi cu coeficienți constanți

Forma generală a sistemelor diferențiale liniar de ordin întâi cu coeficienți constanți este:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) + b_2(t) \\ \cdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) + b_n(t) \end{array} \right. \quad (16.1.1)$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i, j = \overline{1, n}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ iar $y_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}$, sunt funcții necunoscute. Sistemul poate fi scris scris matriceal de forma:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t). \quad (16.1.2)$$

unde $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea sistemului, \mathbf{y}, \mathbf{b} vectori coloană cu n componente, \mathbf{b} este un vector de funcții care reprezintă termenii care dau caracterul de neomogeneitate a sistemului iar \mathbf{y} este vectorul funcțiilor necunoscute.

Exemplul 16.1.1 *Să se determine soluția generală a următoarelor sisteme omogene și neomogene:*

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ z'(t) = 2x(t) - y(t) \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) + y(t) + e^t \\ y'(t) = -2x(t) + 2t. \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases}
 d) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = -y(t) - z(t) + t \\ z'(t) = -x(t) + y(t) - z(t) \end{array} \right. , \\
 e) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -2x(t) + y(t) + 3z(t) + e^t \\ y'(t) = 2y(t) - z(t) + e^{-2t} \\ z'(t) = 2z(t) + 4 \end{array} \right. ,
 \end{cases}$$

Utilizăm comanda *DSolve* pentru rezolvarea sistemelor. Sistemele sunt scrise într-o acoladă în cadrul comenzii *DSolve*. Soluția este obținută sub formă generală.

$$\begin{aligned}
 & a) \text{ DSolve}[\{x'[t] == x[t] - y[t] + z[t], \\
 & y'[t] == x[t] + y[t] - z[t], \\
 & z'[t] == 2x[t] - y[t]\}, \{x[t], y[t], z[t]\}, t] // \text{Simplify} \\
 & \{\{x[t] \rightarrow \frac{1}{6}e^{-t}((1 + 3e^{2t} + 2e^{3t})C[1] - (-1 + e^t)(e^{2t}(6C[2] \\
 & - 4C[3]) - C[3] - e^tC[3])), \\
 & y[t] \rightarrow \frac{1}{2}e^{-t}((-1 + e^{2t})C[1] + e^{2t}(2C[2] - C[3]) + C[3]), \\
 & z[t] \rightarrow \frac{1}{6}e^{-t}((-5 + 3e^{2t} + 2e^{3t})C[1] + e^{2t}(6C[2] - 3C[3]) + 5C[3] + \\
 & e^{3t}(-6C[2] + 4C[3]))\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & b) \text{ solsist2} = \text{DSolve}[\{x'[t] == 2x[t] + y[t] + \text{Exp}[t], \\
 & y'[t] == -2x[t] + 2t\}, \{x[t], y[t]\}, t] // \text{Simplify} \\
 & \{\{x[t] \rightarrow 1 + e^t + t + e^tC[1]\text{Cos}[t] + e^t(C[1] + C[2])\text{Sin}[t],
 \end{aligned}$$

$$y[t] \rightarrow -1 - 2e^t - 2t + e^t C[2] \text{Cos}[t] - e^t (2C[1] + C[2]) \text{Sin}[t] \}}}$$

Sistemele pot fi rezolvate și utilizând faptul că soluția generală este de forma

$$\mathbf{y}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)\mathbf{A}}\mathbf{b}(u)du, \forall t \in \mathbb{I}. \quad (16.1.3)$$

Rezolvarea se face calculând matricea exponențială și utilizând formula:

$$e^{t\mathbf{A}} = P e^{tJ} P^{-1},$$

unde P este matricea modală iar J este forma Jordan (evident, poate fi și forma diagonală).

c) Etapele parcurse pentru rezolvarea sistemului diferențial omogen:
-definim matricea sistemului,

$$ma = \{\{-1, 1, 1\}, \{1, -1, 1\}, \{1, 1, 1\}\};$$

-calculăm matricea modală P și forma Jordan J , folosind comanda *JordanDecomposition*. Am pus în evidență matricele modale și matricea Jordan.

$$\{P, J\} = \text{JordanDecomposition}[ma]$$

$$\{\{\{-1, -1, 1\}, \{1, -1, 1\}, \{0, 1, 2\}\}, \{\{-2, 0, 0\}, \{0, -1, 0\}, \{0, 0, 2\}\}\}$$

P//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

J//MatrixForm

16.1. REZOLVAREA SISTEMELOR DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDIN ÎNȚĂI CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

-calculăm $e^{t\mathbf{A}} = P e^{tJ} P^{-1}$,

mexp = P.MatrixExp[tJ].Inverse[P];

mexp//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \\ -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} & \frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3} \end{pmatrix}$$

-scriem soluția generală,

$\mathbf{c} = \{c1, c2, c3\}$;

solgen = mexp.c//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} c2 \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c1 \left(\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c3 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) \\ c1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c2 \left(\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c3 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) \\ c1 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) + c2 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) + c3 \left(\frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3} \right) \end{pmatrix}$$

d) Pentru sisteme neomogene se parcurg etapele anterioare și în plus calculăm $\int_{t_0}^t e^{(t-s)\mathbf{A}} \mathbf{b}(s) ds$.

Clear[ma1, b1, P1, J1, mexp1]

ma1 = {{0, -1, 0}, {0, -1, -1}, {-1, 1, -2}};

b1[t_] = {0, t, 0};

{P1, J1} = JordanDecomposition[ma1];

P1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

J1//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mexp1[t_] = P1.MatrixExp[tJ1].Inverse[P1];

%//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-t}t + \frac{1}{2}e^{-t}t^2 & -e^{-t}t - \frac{1}{2}e^{-t}t^2 & \frac{1}{2}e^{-t}t^2 \\ \frac{1}{2}e^{-t}t^2 & e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t}t^2 & -e^{-t}t + \frac{1}{2}e^{-t}t^2 \\ -e^{-t}t & e^{-t}t & e^{-t} - e^{-t}t \end{pmatrix}$$

tl = Integrate[mexp1[t - s].b1[s], {s, 0, t}]

{5 - 2t - $\frac{1}{2}e^{-t}(10 + t(6 + t))$, 2 - $\frac{1}{2}e^{-t}(2 + t)^2$, -2 + t + $e^{-t}(2 + t)$ }

%//MatrixForm

-scriem soluția generală,

16.1. REZOLVAREA SISTEMELOR DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDIN ÎNTÂI CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

```

      ⎛
      ⎜ 5 - 2t - ½e-t(10 + t(6 + t))
      ⎜      2 - ½e-t(2 + t)2
      ⎜      -2 + t + e-t(2 + t)
      ⎝
c = {c1, c2, c3};
solgen = mexp1[t].c;
%//MatrixForm
      ⎛
      ⎜ ½c3e-tt2 + c2(-e-tt - ½e-tt2) + c1(e-t + e-tt + ½e-tt2)
      ⎜      ½c1e-tt2 + c2(e-t - ½e-tt2) + c3(-e-tt + ½e-tt2)
      ⎜      -c1e-tt + c2e-tt + c3(e-t - e-tt)
      ⎝
ss = solgen + tI;
//MatrixForm
      ⎛
      ⎜ 5 - 2t + ½c3e-tt2 + c2(-e-tt - ½e-tt2) + c1(e-t + e-tt + ½e-tt2) -
      ⎜      -½e-t(10 + t(6 + t))
      ⎜      2 + ½c1e-tt2 - ½e-t(2 + t)2 + c2(e-t - ½e-tt2) + c3(-e-tt + ½e-tt2)
      ⎜      -2 + t - c1e-tt + c2e-tt + e-t(2 + t) + c3(e-t - e-tt)
      ⎝
d) ma2 = {{-1, 1, 1}, {1, -1, 1}, {1, 1, 1}};
b2[t_] = {Exp[t], Exp[3t], 4};
{P2, J2} = JordanDecomposition[ma2]
{{{ -1, -1, 1}, {1, -1, 1}, {0, 1, 2}}, {{ -2, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, 2}}}

```

P2//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

J2//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mexp2[t_] = P2.MatrixExp[tJ2].Inverse[P2];

mexp2[t]//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \\ -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} & -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} & \frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3} \end{pmatrix}$$

fg1[s_, t_] = mexp2[t - s].b2[s];

%//MatrixForm

16.1. REZOLVAREA SISTEMELOR DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDIN ÎNTÂI CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

$$\begin{pmatrix} e^{3s} \left(\frac{e^{s-t}}{3} - \frac{1}{2}e^{-2(-s+t)} + \frac{1}{6}e^{2(-s+t)} \right) + e^s \left(\frac{e^{s-t}}{3} + \frac{1}{2}e^{-2(-s+t)} + \frac{1}{6}e^{2(-s+t)} \right) \\ + 4 \left(-\frac{e^{s-t}}{3} + \frac{1}{3}e^{2(-s+t)} \right) \\ e^s \left(\frac{e^{s-t}}{3} - \frac{1}{2}e^{-2(-s+t)} + \frac{1}{6}e^{2(-s+t)} \right) + e^{3s} \left(\frac{e^{s-t}}{3} + \frac{1}{2}e^{-2(-s+t)} + \frac{1}{6}e^{2(-s+t)} \right) \\ + 4 \left(-\frac{e^{s-t}}{3} + \frac{1}{3}e^{2(-s+t)} \right) \\ e^s \left(-\frac{e^{s-t}}{3} + \frac{1}{3}e^{2(-s+t)} \right) + e^{3s} \left(-\frac{e^{s-t}}{3} + \frac{1}{3}e^{2(-s+t)} \right) \\ + 4 \left(\frac{e^{s-t}}{3} + \frac{2}{3}e^{2(-s+t)} \right) \end{pmatrix}$$

t2 = Integrate[fg1[s, t], {s, 0, t}];

%//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{60} (-120 - 4e^{-2t} + 65e^{-t} + 10e^t + 40e^{2t} + 9e^{3t}) \\ \frac{1}{60} (-120 + 4e^{-2t} + 65e^{-t} - 10e^t + 40e^{2t} + 21e^{3t}) \\ \frac{1}{12} (-13e^{-t} - 6e^t + 16e^{2t} + 3e^{3t}) \end{pmatrix}$$

c = {c1, c2, c3};

solgen = mexp2[t].c;

%//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} c2 \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c1 \left(\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c3 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) \\ c1 \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c2 \left(\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{6} \right) + c3 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) \\ c1 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) + c2 \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) + c3 \left(\frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3} \right) \end{pmatrix}$$

ss = solgen + t2;

```
e) ma21 = {{2, 1, 3}, {0, 2, -1}, {0, 0, 2}};
b21[t_] = {Exp[t], Exp[-2t], 4};
{P21, J21} = JordanDecomposition[ma21]
{{{1, 0, 0}, {0, 1, 3}, {0, 0, -1}}, {{2, 1, 0}, {0, 2, 1}, {0, 0, 2}}}
```

P21//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

J21//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
mexp21[t_] = P21.MatrixExp[tJ21].Inverse[P21];
mexp21[t_]//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & 3e^{2t}t - \frac{1}{2}e^{2t}t^2 \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t}t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

```
fg11[s_, t_] = mexp21[t - s].b21[s];
%/MatrixForm
```

16.1. REZOLVAREA SISTEMELOR DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDIN ÎNTÂI CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

$$\begin{pmatrix} e^{s+2(-s+t)} + e^{-2s+2(-s+t)}(-s+t) + \\ +4\left(3e^{2(-s+t)}(-s+t) - \frac{1}{2}e^{2(-s+t)}(-s+t)^2\right) \\ e^{-2s+2(-s+t)} - 4e^{2(-s+t)}(-s+t) \\ 4e^{2(-s+t)} \end{pmatrix}$$

t21 = Integrate[fg11[s, t], {s, 0, t}];
 %//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{16}(56 + e^{-2t} - 16e^t + e^{2t}(-41 + 4(29 - 4t)t)) \\ -1 + e^{2t}(1 - 2t) + \text{Cosh}[t]\text{Sinh}[t] \\ 2(-1 + e^{2t}) \end{pmatrix}$$

cs = {c1, c2, c3};

solgen21 = mexp21[t].cs;

%//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} c1e^{2t} + c2e^{2t}t + c3\left(3e^{2t}t - \frac{1}{2}e^{2t}t^2\right) \\ c2e^{2t} - c3e^{2t}t \\ c3e^{2t} \end{pmatrix}$$

s21 = solgen21 + t21//MatrixForm

$$\begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} t + c_3 \left(3e^{2t} t - \frac{1}{2} e^{2t} t^2 \right) + \\ + \frac{1}{16} (56 + e^{-2t} - 16e^t + e^{2t}(-41 + 4(29 - 4t)t)) \\ -1 + c_2 e^{2t} + e^{2t}(1 - 2t) - c_3 e^{2t} t + \text{Cosh}[t]\text{Sinh}[t] \\ c_3 e^{2t} + 2(-1 + e^{2t}) \end{pmatrix}$$

16.2 Studiul punctelor singulare

Studiul punctelor singulare va fi făcut pentru sisteme de forma

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t). \end{cases} \quad (16.2.4)$$

Aceste sisteme, provenite din ecuația diferențială

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \quad (16.2.5)$$

au fost studiate de Poincaré și constituie un model pentru cercetările calitative asupra ecuațiilor diferențiale.

Clasificarea punctelor singulare, prezentată mai jos a fost formulată tot de Poincaré. Studiul punctelor singulare îl vom face pentru sistemul (16.2.4) deoarece devine mai transparentă legătura dintre comportarea curbelor integrale în jurul punctelor singulare și stabilitatea soluției banale pentru sistemul studiat. Analiza o vom face în funcție de rădăcinile ecuației

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (16.2.6)$$

Ilustrăm prin exemple traiectoriile și sensul de deplasare pe traiectoria în următoarele cazuri:

1. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt reale, distincte și de semne contrare. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru instabil și se numește *punct șa*,

Determinăm soluția generală a sistemului.

```

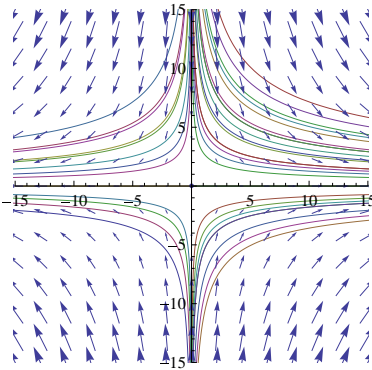
ssis1 = DSolve[{x'[t] == x[t], y'[t] == -2y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
//Simplify
{{x[t] -> e^t C[1], y[t] -> e^{-2t} C[2]}}
x[t_] = ssis1[[1, 2, 2]]
y[t_] = ssis1[[1, 1, 2]]
e^{-2t} C[2]
e^t C[1]

```

Pentru a desena traiectoriile, construim un tabel de funcții, numit *sist11*, pentru diferite valori ale lui $C[1]$ și $C[2]$, pe care le vom înlocui cu i și j , i și j luând valori de la -4 la 10 cu pasul 3. Deoarece *sist11* conține tabelul perechilor de funcții $x(t), y(t)$ sub forma unei matrice, memorate linie după linie, utilizăm comanda *Flatten* pentru a desființa parantezele de linie, iar noul tabel îl numim *graf1*. Comanda *Short* o utilizăm pentru a realiza o formă scurtă a tabelului *graf1*, eliminând eventualele repetiții. Comanda *ParametricPlot* utilizată cu lista *graf1* va genera graficul *graf11*. Opțiunea *PlotRange* o folosim

pentru a garanta că regiunea pe care se trasează graficele este dreptunghiul $[-15, 15] \times [-15, 15]$. Pentru a desena direcția câmpului de vectori atașat sistemului folosim comanda *VectorPlot*. Prin comenzile din graf11 și graf12 sunt desenate traiectoriile și câmpul de vectori, iar comanda *Show* le include pe același sistem de coordonate.

```
sist11 = Table[{x[t], y[t]}/.{C[1] → i, C[2] → j}, {i, -4, 10, 3},
{j, -4, 10, 3}]; graf1 = Flatten[sist11, 1];
Short[graf1, 2];
graf11 = ParametricPlot[Evaluate[graf1], {t, -4, 4},
PlotRange → {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf21 = VectorPlot[{x, -2y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf11, graf21]
```

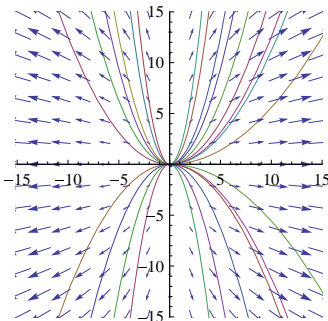


2. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt reale, distincte și ambele pozitive. Originea $(0, 0)$ este punct de echilibru instabil *nod bidirecțional instabil*, comportarea fiind cea indicată în figura următoare depalsarea pe traiectorie făcându-se dinspre origine pentru t crescător,


```

sis3 = DSolve[{x'[t] == 4x[t], y'[t] == 2y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
//Simplify
{{x[t] -> e^{4t}C[1], y[t] -> e^{2t}C[2]}}
x[t_] = sis3[[1, 2, 2]]
y[t_] = sis3[[1, 1, 2]]
e^{2t}C[2]
e^{4t}C[1])
sist13 = Table[{x[t], y[t]}/.{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -4, 6, 2},
{j, -4, 6, 2}]; graf3 = Flatten[sist13, 1];
Short[graf3, 2];
graf13 = ParametricPlot[Evaluate[graf3], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf23 = VectorPlot[{4x, 2y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf13, graf23]

```

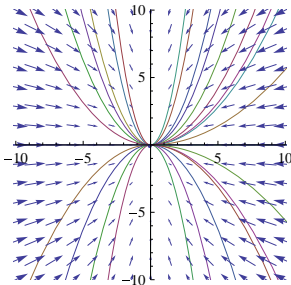


3. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt reale, distincte și ambele negative. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru asimptotic stabil, *nod bidirecțional stabil*, depalsarea pe traiectorie făcându-se către origine când t crește de la $-\infty$ la ∞ .

```

ssis2 = DSolve[{x'[t] == -4x[t], y'[t] == -2y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
//Simplify
{{x[t] -> e^{-4t}C[1], y[t] -> e^{-2t}C[2]}}
x[t_] = ssis2[[1, 2, 2]]
y[t_] = ssis2[[1, 1, 2]]
e^{-2t}C[2]
e^{-4t}C[1]
sist12 = Table[{x[t], y[t]}/.{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -4, 6, 2},
{j, -4, 6, 2}];
graf12 = Flatten[sist12, 1];
Short[graf12, 2];
graf12 = ParametricPlot[Evaluate[graf12], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}}];
graf22 = VectorPlot[{-4x, -2y}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}];
Show[graf12, graf22]

```



În cazurile 2. și 3. curbele integrale sunt aceleași, dar sensul de

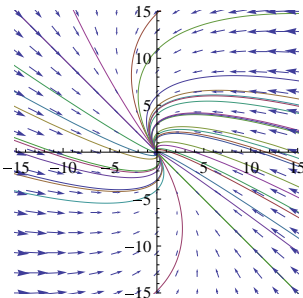
parcurs este invers unul altuia (acest lucru observându-se ușor prin schimbarea lui t în $-t$).

4. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt reale, confundate și negative și matricea sistemului diferențial admite un singur vector propriu liniar independent. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru *unidirecțional stabil*, depalsarea pe traiectorie făcându-se către origine când t crește,

```

sis4 = DSolve[{x'[t] == -3x[t] - y[t], y'[t] == x[t] - y[t]},
{x[t], y[t]}, t] // Simplify
{{x[t] -> e^{-2t}(C[1] - tC[1] - tC[2]), y[t] -> e^{-2t}(C[2] + t(C[1] + C[2]))}}
sist14 = Table[{sis4[[1, 1, 2]], sis4[[1, 2, 2]]} /. {C[1] -> i, C[2] -> j},
{i, -4, 6, 2}, {j, -4, 6, 2}];
graf4 = Flatten[sist14, 1]; Short[graf4, 2];
graf14 = ParametricPlot[Evaluate[graf4], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf24 = VectorPlot[{-3x - y, x - y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf14, graf24]

```



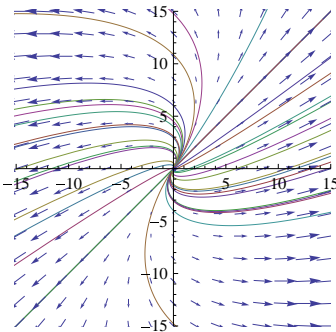
5. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt reale, confundate și pozitive și

matricea sistemului diferențial admite un singur vector propriu. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru *unidirecțional instabil*, depalsarea pe traiectorie făcându-se dinspre origine când t crește,

```

sis5 = DSolve[{x'[t] == 3x[t] - y[t], y'[t] == x[t] + y[t]},
{x[t], y[t]}, t]//Simplify
{{x[t] -> e^{2t}((1 + t)C[1] - tC[2]), y[t] -> e^{2t}(t(C[1] - C[2]) + C[2])}}
sist15 = Table[{sis5[[1, 1, 2]], sis5[[1, 2, 2]]}/.
{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -4, 6, 2}, {j, -4, 6, 2}];
graf5 = Flatten[sist15, 1]; Short[graf5, 2];
graf15 = ParametricPlot[Evaluate[graf5], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf25 = VectorPlot[{3x - y, x + y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf15, graf25]

```



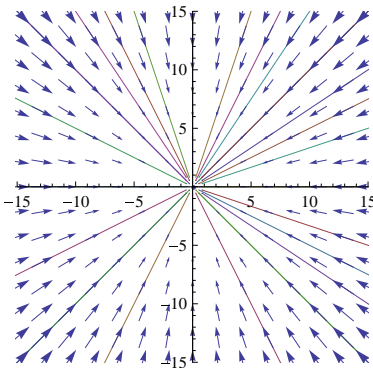
6. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt reale, confundate, negative și matricea sistemului diferențial admite doi vectori proprii liniar independenți. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru *unidirecțional*

stabil, depalsarea pe traiectorie, raze, făcându-se către origine când t crește,

```

ssis61 = DSolve[{x'[t] == -x[t], y'[t] == -y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
//Simplify
{{x[t] -> e^-t C[1], y[t] -> e^-t C[2]}}
sist161 = Table[{ssis61[[1, 1, 2]], ssis61[[1, 2, 2]]}/.
{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -4, 6, 2}, {j, -4, 6, 2}];
graf161 = Flatten[sist161, 1];
Short[graf161, 2];
graf161 = ParametricPlot[Evaluate[graf161], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf261 = VectorPlot[{-x, -y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf161, graf261]

```



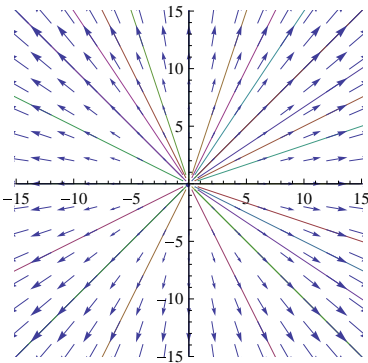
7. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt reale, confundate, pozitive și matricea sistemului diferențial admite doi vectori proprii liniar

independenți. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru *unidirecțional instabil*, depalsarea pe traiectorie, raze, făcându-se dinspre origine când t crește,

```

sis62 = DSolve[{x'[t] == x[t], y'[t] == y[t]}, {x[t], y[t]}, t]//Simplify
{{x[t] -> e^t C[1], y[t] -> e^t C[2]}}
sis162 = Table[{sis62[[1, 1, 2]], sis62[[1, 2, 2]]}/.
{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -4, 6, 2}, {j, -4, 6, 2}];
graf62 = Flatten[sis162, 1];
Short[graf62, 2];
graf162 = ParametricPlot[Evaluate[graf62], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf262 = VectorPlot[{x, y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf162, graf262]

```



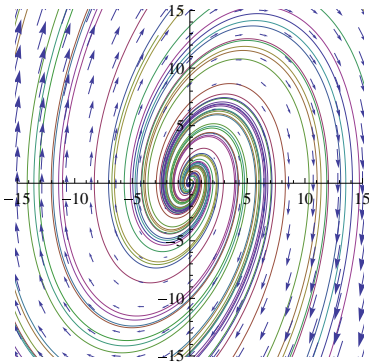
8. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt complexe cu partea reală pozitivă. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru nestabil, numit *focar instabil*.

Trajectoriile sunt spirale. Sensul de deplasare pe spirale este dinspre origine pentru t crescător.

```

sis6 = DSolve[{x'[t] == 2y[t], y'[t] == -5x[t] + 2y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
//Simplify
{{x[t] -> 1/3 e^t (3C[1] Cos[3t] - (C[1] - 2C[2]) Sin[3t]),
 y[t] -> 1/3 e^t (3C[2] Cos[3t] + (-5C[1] + C[2]) Sin[3t])}}
sist16 = Table[{sis6[[1, 1, 2]], sis6[[1, 2, 2]]} /.
{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -4, 6, 2}, {j, -4, 6, 2}];
graf6 = Flatten[sist16, 1]; Short[graf6, 2];
graf16 = ParametricPlot[Evaluate[graf6], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf26 = VectorPlot[{2y, -5x + 2y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf16, graf26]

```



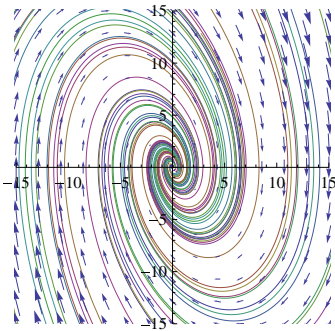
9. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt complexe cu partea reală negativă. Punctul $(0, 0)$ este punct de echilibru asimptotic stabil, numit

focar stabil. Traiectoriile sunt spirale logaritmice, depalsarea pe traiectione făcându-se către origine pentru t crescător.

```

sis7 = DSolve[{x'[t] == 2y[t], y'[t] == -5x[t] - 2y[t]}, {x[t], y[t]}, t]
//Simplify
{{x[t] -> 1/3 e^{-t} (3C[1] Cos[3t] + (C[1] + 2C[2]) Sin[3t]),
 y[t] -> 1/3 e^{-t} (3C[2] Cos[3t] - (5C[1] + C[2]) Sin[3t])}}
sist17 = Table[{sis7[[1, 1, 2]], sis7[[1, 2, 2]]} /.
{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -4, 6, 2}, {j, -4, 6, 2}];
graf7 = Flatten[sist17, 1]; Short[graf7, 2];
graf17 = ParametricPlot[Evaluate[graf7], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-15, 15}, {-15, 15}}];
graf27 = VectorPlot[{2y, -5x - 2y}, {x, -15, 15}, {y, -15, 15}];
Show[graf17, graf27]

```

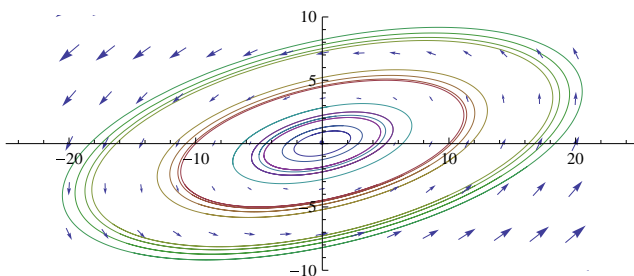


10. rădăcinile ecuației (16.2.6) sunt complexe cu partea reală nulă. $(0, 0)$ este punct de echilibru stabil, dar nu asimptotic stabil, numit *centru*. Traiectoriile sunt curbe închise, mărginite care conțin originea.


```

ssis = DSolve[{x'[t] == -x[t] + 5y[t], y'[t] == -x[t] + y[t]},
{x[t], y[t]}, t]//Simplify
{{x[t] -> C[1]Cos[2t] - (C[1] - 5C[2])Cos[t]Sin[t],
y[t] -> 1/2(2C[2]Cos[2t] + (-C[1] + C[2])Sin[2t])}}
sist1 = Table[{ssis[[1, 1, 2]], ssis[[1, 2, 2]]}]/.
{C[1] -> i, C[2] -> j}, {i, -1, 5, 2}, {j, -1, 8, 3};
grafi = Flatten[sist1, 1]; Short[grafi, 2];
graf1 = ParametricPlot[Evaluate[grafi], {t, -2, 2},
PlotRange -> {{-20, 20}, {-25, 25}}];
graf2 = VectorPlot[{x - 5y, 2x - y}, {x, -20, 20}, {y, -25, 25}];
Show[graf1, graf2]

```



Observații 1. Clasificarea punctelor de echilibru ale sistemului (16.2.4) este asociată cu clasificarea punctelor singulare ale ecuației (16.2.5), curbele integrale ale ecuației (16.2.5) coincidând cu traiectoriile mișcărilor sistemului (16.2.4), punctul de echilibru $x = 0, y = 0$ a sistemului (16.2.4) fiind punct singular al ecuației (16.2.5).

2. Pentru sisteme de forma

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (16.2.7)$$

s-a aplicat ”metoda primei aproximații”. Aproximația liniară a sistemului (16.2.7) se obține dezvoltând în serie Taylor funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ în vecinătatea punctului $(0, 0)$ și neglijând termenii de ordin mai mare sau egal cu doi. Se obține astfel sistemul (16.2.4).

Teoremă lui H. Poincaré ne arată că intervenția termenilor neliniari în x și y nu modifică tipul punctului singular determinat cu ajutorul liniarizării și, eventual, al unei translații, decât într-un singur caz, cazul centrului, care se poate uneori transforma în focar.

Transformata Laplace

Ideea de bază a calcului operațional o reprezintă introducerea transformărilor integrale. Avantajul acestei metode constă în aceea că reduce studiul unor ecuații diferențiale sau sisteme de ecuații diferențiale la rezolvarea unor ecuații sau sisteme algebrice .

Vom defini o clasă de funcții, clasa funcțiilor original și fiecărei funcții original îi vom asocia transformata ei Laplace care este o funcție imagine. Această asociere este inversabilă și permite un transfer de operații, astfel încât unor operații asupra funcțiilor original să le corespundă operații "mai simple" între imaginile lor Laplace. Rezolvarea unei ecuații diferențiale cu ajutorul transformatei Laplace implică trei etape:

1. ecuația diferențială este transformată într-o ecuație algebrică;
2. se rezolvă ecuația algebrică în mulțimea funcțiilor imagine;
3. soluția ecuației algebrice, care este o funcție imagine, este trans-

formată într-o funcție original.

O funcție

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

se numește funcție original dacă:

- (i) $f(t) = 0, \forall t < 0$;
- (ii) pe orice interval finit, f are cel mult un număr finit de discontinuități iar în punctele de discontinuitate există limite laterale finite.
- (iii) f are cel mult o creștere de tip exponențial, adică există două constante reale $M \geq 0$ și α astfel încât:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t > 0. \quad (17.0.1)$$

Dacă funcția $f = f(t)$ satisface (17.0.1) pentru α , atunci această inegalitate va fi satisfăcută pentru orice $s \in \mathbb{C}$ cu $Real(s) > \alpha$. Notăm cu $s_0 = \inf \{\alpha : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t > 0\}$ și s_0 se numește abscisă de convergență (indice de creștere).

Fie f o funcție original cu abscisa de convergență s_0 .

Fie $\Delta = \{s \in \mathbb{C}, Real(s) \geq s_0\}$. Funcția $F : \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, definită prin

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (17.0.2)$$

se numește transformata Laplace a funcției f sau imaginea prin transformarea Laplace a funcției f și se notează $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.

Pentru a utiliza transformata Laplace încercăm pachetul care conține comenzile acesteia. Se realizează prin

"LaplaceTransform"

LaplaceTransform

după care se utilizează comenzile *LaplaceTransform* pentru a calcula transformata Laplace a unor funcții.

Exemplul 17.0.1 *Să se calculeze transformata Laplace a funcțiilor*

- a) $t^3 \sin(3t)$,
- b) e^{2t}
- c) $(\theta(t) - \theta(t - 1))t^2$
- d) $t \sin(at)$
- e) $e^{t^2} \sin(3t)$

`LaplaceTransform[t^3 Sin[3t], t, s]`

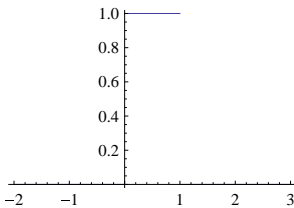
$$\frac{72(-9s+s^3)}{(9+s^2)^4}$$

`LaplaceTransform[UnitStep[t]Exp[2t], t, s]`

$$\frac{1}{-2+s}$$

`f[t]:=UnitStep[t] - UnitStep[t - 1]`

`Plot[f[t], {t, -2, 3}]`



`g[t]:=UnitStep[t] - UnitStep[t - 1]`

`LaplaceTransform[g[t], t, s]`

$$\frac{2}{s^3} - \frac{e^{-s}(2+2s+s^2)}{s^3}$$

`lap1 = LaplaceTransform[t Sin[at], t, s]`

$$\frac{2as}{(a^2+s^2)^2}$$

Transformata Laplace a unei funcții periodice nu poate fi calculată decât folosind rezultatul: dacă f este o funcție original periodică de perioadă $T > 0$, atunci

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

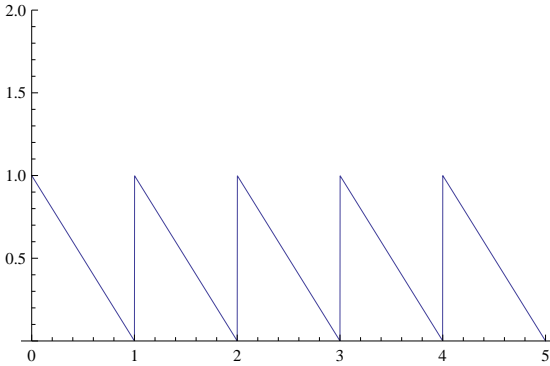
Exemplul 17.0.2 Să se calculeze transformata Laplace a funcției periodice de perioadă $T = 1$, $f(x) = 1 - x$ pentru $x \in [0, 1)$.

```
Clear[f, g]
```

```
f[x.]:=1-x/;0<=x<=1
```

```
f[x.]:=f[x-1]/;x>1
```

```
Plot[f[x], {x, 0, 5}, PlotRange -> {0, 2}]
```



```
LaplaceTransform[f[t], t, s]
```

```
LaplaceTransform[f[t], t, s]
```

```
p1 = Integrate[(1 - t)Exp[-st], {t, 0, 1}]
```

$$\frac{-1+e^{-s}+s}{s^2}$$

```
g[s.] = %
```

$$\frac{-1+e^{-s}+s}{s^2}$$

p2 = InverseLaplaceTransform[g[s](1 - Exp[-s]), s, t]

1 - t - (-2 + t)HeavisideTheta[-2 + t] + (-3 + 2t)HeavisideTheta[-1 + t]

Exemplul 17.0.3 *Să se calculeze originalul funcțiilor:*

a) $F(s) = \frac{2as}{s^2+a^2},$

b) $F(s) = \frac{2s}{(s+2)^2},$

c) $F(s) + \frac{2s}{s^4+s^2+1}.$

Folosim comanda *InverseLaplaceTransform* pentru determinarea inversei transformatei Laplace.

InverseLaplaceTransform $\left[\frac{2as}{(a^2+s^2)^2}, s, t\right]$

tSin[at]

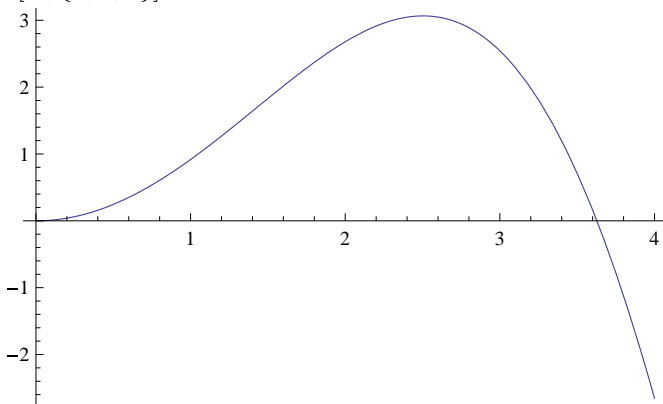
InverseLaplaceTransform $\left[\frac{2s}{(s+2)^2}, s, t\right]$

-2e^{-2t}(-1 + 2t)

InverseLaplaceTransform $\left[\frac{2s}{s^4+s^2+1}, s, t\right]$

$\frac{2e^{-t/2}(-1+e^t)\text{Sin}\left[\frac{\sqrt{3}t}{2}\right]}{\sqrt{3}}$

Plot[%, {t, 0, 4}]



Exemplul 17.0.4 Să se rezolve cu ajutorul transformatei Laplace ecuația diferențială

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = \exp(t) \cos(2t)$$

cu condițiile inițiale a) $x(0) = x'(0) = 1$ și b) $x(0) = a, x'(0) = b$.

Pentru determinarea soluției unei ecuații diferențiale cu ajutorul transformatei Laplace se procedează astfel:

-se aplică transformata Laplace ecuației diferențiale; se obține o ecuație algebrică liniară de ordin întâi în necunoscuta $LaplaceTransform[x[t], t, s]$.

Clear[x, t, lt1, lt2]

$$lt1 = LaplaceTransform[x''[t] - 2x'[t] + 5x[t] == Exp[t] Cos[2t], t, s]$$

$$5LaplaceTransform[x[t], t, s] + s^2LaplaceTransform[x[t], t, s] -$$

$$2(sLaplaceTransform[x[t], t, s] - x[0]) - sx[0] - x'[0] == \frac{-1+s}{4+(-1+s)^2}$$

-rezolvăm ecuația algebrică cu ajutorul comenzii *Solve*, necunoscuta fiind $LaplaceTransform[x[t], t, s]$.

$$lt2 = Solve[%, LaplaceTransform[x[t], t, s]]$$

$$\{ \{ LaplaceTransform[x[t], t, s] \rightarrow$$

$$\frac{-1+s-10x[0]+9sx[0]-4s^2x[0]+s^3x[0]+5x'[0]-2sx'[0]+s^2x'[0]}{(5-2s+s^2)^2} \} \}$$

-soluția se găsește în lista de ieșire *lt2* cu ajutorul comenzilor de mai jos,

$$lt2[[1, 1, 2]]$$

$$\frac{-1+s-10x[0]+9sx[0]-4s^2x[0]+s^3x[0]+5x'[0]-2sx'[0]+s^2x'[0]}{(5-2s+s^2)^2}$$

-determinăm originalul funcției imagine compusă din elementele listei de ieșire *lt3*, și impunem condiții inițiale

a) $\text{lt3} = \text{lt2}[[1, 1, 2]]/.{\mathbf{x}[0] \rightarrow 1, \mathbf{x}'[0] \rightarrow 1} // \text{Simplify}$

$$\frac{-6+8s-3s^2+s^3}{(5-2s+s^2)^2}$$

$\text{lt3}[[2]]$

$\text{lt3}[[1]]$

$$-6 + 8s - 3s^2 + s^3$$

$$\frac{1}{(5-2s+s^2)^2}$$

$\text{InverseLaplaceTransform}[\text{lt3}[[2]]\text{lt3}[[1]], \mathbf{s}, \mathbf{t}] // \text{FullSimplify}$

$$\frac{1}{4}e^t(4\text{Cos}[2t] + t\text{Sin}[2t])$$

b) Determinăm soluția ecuației diferențiale rezolvată anterior cu transformata Laplace, dar cu condiții oarecare, $x(0) = a$ și $x'(0) = b$.

$\text{lt3} = \text{lt2}[[1, 1, 2]]/.{\mathbf{x}[0] \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{x}'[0] \rightarrow \mathbf{b}} // \text{Simplify}$

$$\frac{-1+s+b(5-2s+s^2)+a(-10+9s-4s^2+s^3)}{(5-2s+s^2)^2}$$

$\text{lt3}[[2]]$

$$-1 + s + b(5 - 2s + s^2) + a(-10 + 9s - 4s^2 + s^3)$$

$\text{lt3}[[1]]$

$$\frac{1}{(5-2s+s^2)^2}$$

$\text{InverseLaplaceTransform}[\text{lt3}[[2]]\text{lt3}[[1]], \mathbf{s}, \mathbf{t}] // \text{FullSimplify}$

$$\frac{1}{4}e^t(4a\text{Cos}[2t] + (-2a + 2b + t)\text{Sin}[2t])$$

Observăm că pentru $a = 1$ și $b = 1$ regăsim soluția ecuației diferențiale de la punctul a).

Exemplul 17.0.5 *Să se rezolve cu ajutorul transformatei Laplace*

următoarele sisteme diferențiale:

$$a) \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y(t) + \sin(t) \\ y'(t) = 4x(t) + 2y(t) + \cos(t) \end{cases}$$

cu condițiile inițiale $x(0) = 0, y(0) = 1$.

$$b) \begin{cases} x'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) + e^t \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) + e^{3t} \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) + 4, \\ x(0) = y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$$

```

a) LaplaceTransform[{x'[t] == -2x[t] - y[t] + Sin[t],
y'[t] == 4x[t] + 2y[t] + Cos[t]}, t, s]
{SLaplaceTransform[x[t], t, s] - x[0]
== 1/(1+s^2) - 2LaplaceTransform[x[t], t, s] -
LaplaceTransform[y[t], t, s], sLaplaceTransform[y[t], t, s] - y[0] == s/(1+s^2)
+4LaplaceTransform[x[t], t, s] + 2LaplaceTransform[y[t], t, s]
Solve[%, {LaplaceTransform[x[t], t, s], LaplaceTransform[y[t], t, s]}]
{{LaplaceTransform[x[t], t, s] ->
- (2+2x[0]-sx[0]+2s^2x[0]-s^3x[0]+y[0]+s^2y[0])/
s^2(1+s^2)},
LaplaceTransform[y[t], t, s] ->
-4(-1/(1+s^2)-x[0])-(2+s)(-s/(1+s^2)-y[0])
It = %/.{x[0] -> 0, y[0] -> 1} //Simplify
{{LaplaceTransform[x[t], t, s] -> - (3+s^2)/
s^2+s^4},

```

$$\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] \rightarrow \frac{6+3s+3s^2+s^3}{s^2+s^4}$$

$$\text{It}[[1, 1, 2]]$$

$$-\frac{3+s^2}{s^2+s^4}$$

$$\text{It}[[1, 2, 2]]$$

$$\frac{6+3s+3s^2+s^3}{s^2+s^4}$$

$$\text{InverseLaplaceTransform}[\text{It}[[1, 1, 2]], \mathbf{s}, \mathbf{t}]/\text{FullSimplify}$$

$$-3t + 2\text{Sin}[t]$$

$$\text{InverseLaplaceTransform}[\text{It}[[1, 2, 2]], \mathbf{s}, \mathbf{t}]/\text{FullSimplify}$$

$$3 + 6t - 2\text{Cos}[t] - 3\text{Sin}[t]$$

$$\begin{aligned} & \text{b) LaplaceTransform}\{\{\mathbf{x}'[\mathbf{t}] == -\mathbf{x}[\mathbf{t}] + \mathbf{y}[\mathbf{t}] + \mathbf{z}[\mathbf{t}] + \text{Exp}[\mathbf{t}], \\ & y'[t]==x[t] - y[t] - z[t] + \text{Exp}[3t], \\ & z'[t] == x[t] + y[t] + z[t] + 4\}, t, s] \\ & \{s\text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] - x[0] \\ & == \frac{1}{-1+s} - \text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] + \} \\ & \text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] + \text{LaplaceTransform}[z[t], t, s], \\ & s\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] - y[0] == \\ & \frac{1}{-3+s} + \text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] - \\ & \text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] - \text{LaplaceTransform}[z[t], t, s], \\ & s\text{LaplaceTransform}[z[t], t, s] - z[0] == \frac{4}{s} + \text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] + \\ & \text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] + \text{LaplaceTransform}[z[t], t, s] \\ & \text{Solve}[\%, \{\text{LaplaceTransform}[\mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}, \mathbf{s}], \text{LaplaceTransform}[\mathbf{y}[\mathbf{t}], \mathbf{t}, \mathbf{s}], \end{aligned}$$

LaplaceTransform[z[t], t, s]]

{{LaplaceTransform[x[t], t, s] →

$$\frac{-12+17s-2s^2-s^3-3s^2x[0]+4s^3x[0]-s^4x[0]-3sy[0]+4s^2y[0]-s^3y[0]-3sz[0]+4s^2z[0]-s^3z[0]}{(-3+s)(-1+s)^2s(2+s)},$$

LaplaceTransform[y[t], t, s] →

$$\frac{-(4-9s+4s^2-s^3+6x[0]-11sx[0]+6s^2x[0]-s^3x[0]+6y[0]-8sy[0]-s^2y[0]+4s^3y[0]-s^4y[0]+3sz[0]-4s^2z[0]+s^3z[0])}{((-3+s)(-1+s)^2s(2+s))},$$

LaplaceTransform[z[t], t, s] →

$$\frac{-(2-s)\left(\frac{1}{-1+s}+x[0]-(1+s)\left(-\frac{4}{s}-z[0]\right)\right)-(2+s)\left(\frac{1}{-3+s}-\frac{4}{s}+y[0]-z[0]\right)}{-2s+s^2+s^3}}{\}}\}$$

It = %/.{x[0] → 0, y[0] → 0, z[0] → 0} // Simplify

$$\{\{\text{LaplaceTransform}[x[t], t, s] \rightarrow \frac{12-17s+2s^2+s^3}{(-3+s)(-1+s)^2s(2+s)},$$

$$\text{LaplaceTransform}[y[t], t, s] \rightarrow \frac{-4+9s-4s^2+s^3}{(-3+s)(-1+s)^2s(2+s)},$$

$$\text{LaplaceTransform}[z[t], t, s] \rightarrow \frac{2(4-7s+2s^2)}{(-3+s)(-1+s)^2s}\}\}\}$$

It[[1, 1, 2]]

$$\frac{12-17s+2s^2+s^3}{(-3+s)(-1+s)^2s(2+s)}$$

It[[1, 2, 2]]

$$\frac{-4+9s-4s^2+s^3}{(-3+s)(-1+s)^2s(2+s)}$$

It[[1, 3, 2]]

$$\frac{2(4-7s+2s^2)}{(-3+s)(-1+s)^2s}$$

Bibliografie la partea a III-a

1. Martha L. Abell, James P. Braselton, *Mathematica by examples*, AP profesional, 2006.
2. Martha L. Abell, James P. Braselton, *Differential equations with Mathematica*, AP profesional, 1993.
3. Ioan Bacalu, *Ecuatii diferențiale*, MATRIXROM București, 2005.
4. Adrian Corduneanu, Ariadna Lucia Pletea, *Noțiuni de teoria ecuațiilor diferențiale*, MATRIXROM București, 1999.

* * *

Partea IV

Exemple de rezolvare a unor probleme inginerești

Probleme de mecanică exprimabile sub forma unor ecuații diferențiale

Formularea unei probleme de mecanică în limbajul ecuațiilor diferențiale presupune stabilirea unor dependențe matematice între mărimi variabile și derivatele lor până la un anumit ordin, împreună cu o serie de constrângeri pe care trebuie să le respecte soluția respectivei probleme. În ceea ce urmează vor fi prezentate câteva exemplificări ale acestei proceduri de lucru.

18.1 Aruncarea oblică în câmp gravitațional (în vid)

Ne propunem ca obiectiv analiza traiectoriei parcurse de un punct material cu masa m aruncat în câmpul gravitațional al Pământului pe o

direcție care formează unghiul $0^\circ < \alpha_0 < 90^\circ$ cu orizontala (Fig. 18.1).

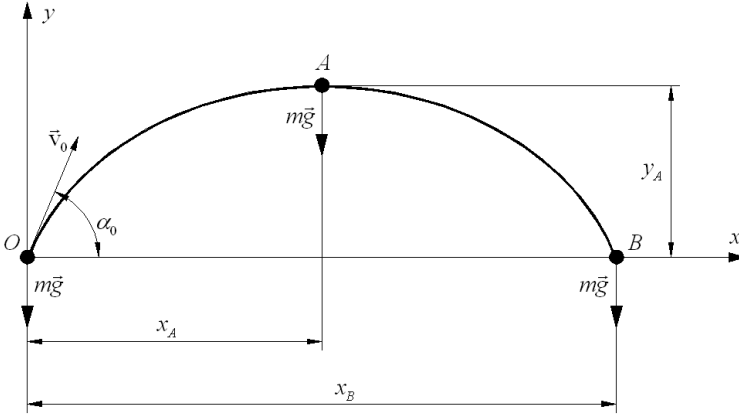


Figura 18.1: Aruncarea oblică a unui punct material în câmpul gravitațional al Pământului

Punctul de pornire în demersul nostru este reprezentat de principiul al doilea al dinamicii, $\vec{F} = m\vec{a}$. Neglijând rezistența opusă de aerul atmosferic, în reperul cartezian xOy din Figura 18.1 această lege poate fi exprimată prin ecuațiile diferențiale

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} + mg = 0, \quad (18.1.1)$$

în care

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \geq 0, \quad (18.1.2)$$

sunt coordonatele punctului material la un moment oarecare t , iar g este accelerația gravitațională (a cărei variație cu altitudinea este considerată nesemnificativă în cazul de față). Datorită coeficienților constanți, rezolvarea ecuațiilor diferențiale (18.1.2) nu ridică dificultăți.

Propriu-zis, prin două integrări succesive în raport cu variabila timp rezultă soluțiile generale

$$x(t) = c_1 t + c_2, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \quad (18.1.3)$$

Constantele c_1 , c_2 , c_3 și c_4 se determină prescriind coordonatele de lansare și componentele vitezei inițiale ale punctului material (Fig. 18.1):

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & \dot{x}(0) &= v_0 \cos \alpha_0, \\ y(0) &= 0, & \dot{y}(0) &= v_0 \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (18.1.4)$$

Aplicând aceste constrângeri relațiilor generale (18.1.3), obținem două sisteme de ecuații algebrice ale căror soluții sunt

$$c_1 = v_0 \cos \alpha_0, \quad c_2 = 0, \quad (18.1.5)$$

respectiv

$$c_3 = v_0 \sin \alpha_0, \quad c_4 = 0. \quad (18.1.6)$$

După înlocuirea expresiilor (18.1.5) – (18.1.6) ale constantelor de integrare, formulele (18.1.3) devin

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha_0, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha_0, \quad t \geq 0. \quad (18.1.7)$$

Ecuațiile de mai sus definesc o traiectorie parametrizată. Condiția $0^\circ < \alpha_0 < 90^\circ$ ne permite să explicităm timpul t din prima relație (18.1.7):

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}. \quad (18.1.8)$$

Procedând la înlocuirea lui t astfel exprimat în ultima dintre relațiile (18.1.7), vom obține

$$y(x) = x \left[\operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{gx}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0) \right], \quad y \geq 0. \quad (18.1.9)$$

Formula (18.1.9) descrie o parabolă. Intersecțiile acestei curbe cu axa Ox au abscisele $x_0 = 0$ și

$$x_B = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}. \quad (18.1.10)$$

Coordonata x_B este bătaia aruncării oblice (poziția punctului B din Figura 18.1). Timpul necesar pentru parcurgerea distanței OB poate fi determinat înlocuind expresia lui x_B în relația (18.1.8). Se obține astfel formula

$$t_B = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Altitudinea maximă la care ajunge punctul material reprezintă extremul parabolei (18.1.9). Anulând derivata funcției $y = y(x)$ definită sub forma (18.1.9), rezultă ecuația

$$\operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{g x_A}{v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_0) = 0.$$

Soluția acesteia este abscisa maximului (punctul A din Figura 18.1):

$$x_A = \frac{x_B}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g}. \quad (18.1.11)$$

Altitudinea corespunzătoare se obține înlocuind x_A definit ca mai sus în ecuația (18.1.9):

$$y_A = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}. \quad (18.1.12)$$

De asemenea, timpul necesar deplasării până la înălțimea y_A rezultă prin înlocuirea expresiei (18.1.11) a lui x_A în relația (18.1.8):

$$t_A = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Analizând formulele (18.1.10) și (18.1.12), constatăm că atât bătaia cât și altitudinea aruncării sunt proporționale cu pătratul vitezei de lansare, dar depind și de unghiul α_0 . Pentru v_0 fixat, din (18.1.10) rezultă că x_B atinge o valoare maximă atunci când

$$\alpha_0 = \alpha_{0,\text{optim}} = 45^\circ.$$

Acestui unghi îi corespunde bătaia (vezi (18.1.10))

$$x_{B,\text{max}} = x_B(\alpha_{0,\text{optim}}) = \frac{v_0^2}{g}.$$

Altitudinea maximă atinsă într-o astfel de aruncare rezultă prin înlocuirea parametrului $\alpha_{0,\text{optim}}$ în formula (18.1.12):

$$y_A(\alpha_{0,\text{optim}}) = \frac{v_0^2}{4g}.$$

18.2 Abordarea problemei aruncării în vid cu MATHEMATICA

Vom afla soluția parametrică și explicită a ecuației diferențiale, și vom vizualiza graficul ei. Pentru a veni în sprijinul cititorului, vom prezenta comenzile MATHEMATICA în mod redondant.

_____(*MATHEMATICA*)_____

```

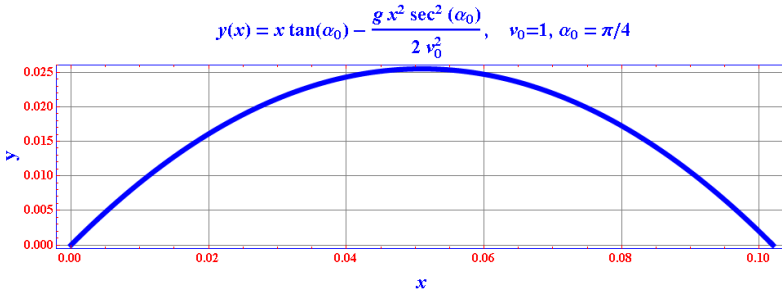
ecuatia1 = {x''[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == v0Cos[alpha0]};
ecuatia2 = {y''[t] + g == 0, y[0] == 0, y'[0] == v0Sin[alpha0]};
sistem = {ecuatia1, ecuatia2};
necunoscute = {x[t], y[t]};
variabila = t;
solutia = {x[t], y[t]}/.DSolve[sistem, necunoscute, t][[1]];
Y[x_] = y = y/.
Solve[Eliminate[{x == solutia[[1]], y == solutia[[2]]},
t], y][[1]]// Simplify;
Print["Solutia parametrica: ", " x(t) = ", solutia[[1]]]
Print[" ", " y(t) = ", solutia[[2]]]
Print["Solutia explicita: ", " y(x) = ", Y[x]]
    
```

Solutia parametrica: $x(t) = t v_0 \cos [\alpha_0]$

$$y(t) = \frac{1}{2} (-g t^2 + 2 t v_0 \sin [\alpha_0])$$

Solutia explicita: $y(x) = -\frac{g x^2 \sec [\alpha_0]^2}{2v_0^2} + x \tan[\alpha_0]$

Pentru valorile: $\alpha_0 = \pi/4$; $v_0 = 1$; $g = 9.80665$, folosind comanda Plot, obținem graficul următor



18.3 Aruncarea oblică în câmp gravitațional (în atmosferă)

Vom relua problema aruncării oblice în câmp gravitațional luând în considerare de această dată și rezistența aerului atmosferic. Admitem că forța de frânare este proporțională cu viteza curentă a punctului material. În această ipoteză, principiul al doilea al dinamicii se va explicita sub forma

$$m \ddot{x} + b\dot{x} = 0, \quad m \ddot{y} + b\dot{y} + mg = 0, \quad (18.3.13)$$

unde $b > 0$ este rezistența aerului (presupusă constantă). Pentru comoditatea calculelor, este convenabilă definirea coeficientului de frânare $\gamma = \frac{b}{m}$. Cu ajutorul acestei mărimi, ecuațiile (18.3.13) devin

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0, \quad \ddot{y} + \gamma\dot{y} + g = 0. \quad (18.3.14)$$

Prima dintre ele are soluția generală

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0, \quad (18.3.15)$$

unde A_0 și A_1 sunt constante arbitrare. Cea de a doua dintre ecuațiile (18.3.14) are partea omogenă identică sub aspect formal cu prima ecuație (18.3.14). Drept consecință, soluția sa generală poate fi exprimată ca o sumă în care, alături de o componentă de tip (18.3.15), intervine un termen adițional de forma Ct :

$$y(t) = B_0 + B_1 e^{-\gamma t} + Ct, \quad t \geq 0. \quad (18.3.16)$$

În expresia funcției $y = y(t)$, mărimile B_0 și B_1 sunt constante arbitrare. Cât privește parametrul C , el se determină impunând constrângerea ca a doua dintre ecuațiile (18.3.14) să fie identic verificată de soluția (18.3.15). Rezultă astfel condiția

$$\gamma C + g = 0. \quad (18.3.17)$$

Din (18.3.17) se deduce imediat

$$C = -\frac{g}{\gamma}.$$

Înlocuind expresia lui C în (18.3.16), obținem soluția generală

$$y(t) = B_0 + B_1 e^{-\gamma t} - \frac{gt}{\gamma}, \quad t \geq 0. \quad (18.3.18)$$

Constantele A_0 , A_1 , B_0 și B_1 se determină impunând satisfacerea condițiilor inițiale (18.1.4) de către funcțiile $x = x(t)$ și $y = y(t)$ definite sub forma (18.3.15), respectiv (18.3.18). Rezultă astfel două

sisteme de ecuații algebrice ale căror soluții sunt

$$\begin{aligned} A_0 &= -A_1 = \frac{1}{\gamma} v_0 \cos \alpha_0, \\ B_0 &= -B_1 = \frac{1}{\gamma} \left(v_0 \sin \alpha_0 + \frac{g}{\gamma} \right). \end{aligned} \tag{18.3.19}$$

După înlocuirea expresiilor (18.3.19) ale constantelor de integrare, formulele (18.3.15) și (18.3.18) devin

$$x(t) = \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} v_0 \cos \alpha_0, \quad y(t) = \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} v_0 \sin \alpha_0 + \frac{g}{\gamma} \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} - t \right), \tag{18.3.20}$$

pentru $t \geq 0$. Ecuațiile de mai sus definesc traiectoria parametrizată a punctului material în prezența unei frânări exercitate de aerul atmosferic. Forma lor nu permite deducerea unei formule explicite asemănătoare cu (18.1.9). De fapt, traiectoria perturbată de rezistența aerului atmosferic nu mai coincide cu o parabolă (fig. 18.2). Se poate totuși demonstra că setul de formule (18.3.20) se apropie asimptotic de soluția (18.1.7) atunci când parametrul γ tinde spre zero.

Ecuațiile (18.3.20) nu permit deducerea unei relații de calcul explicite pentru durata aruncării t_B . Acest parametru poate fi determinat doar prin calcul numeric. Propriu-zis, t_B trebuie căutat ca soluție strict pozitivă a ecuației $y(t_B) = 0$, adică (vezi (18.3.20))

$$\frac{1 - e^{-\gamma t_B}}{\gamma} v_0 \sin \alpha_0 + \frac{g}{\gamma} \left(\frac{1 - e^{-\gamma t_B}}{\gamma} - t_B \right) = 0, \quad t_B > 0.$$

Odată cunoscut parametrul t_B , prima dintre relațiile (18.3.20) permite evaluarea bății:

$$x_B = \frac{1 - e^{-\gamma t_B}}{\gamma} v_0 \cos \alpha_0.$$

Durata deplasării ascendente t_A și coordonatele (x_A, y_A) ale punctului de altitudine maximă atins de-a lungul traiectoriei pot fi totuși calculate analitic. Parametrul t_A se obține anulând derivata funcției $y = y(t)$ definite de a doua dintre formulele (18.3.20). Rezultă astfel ecuația

$$e^{-\gamma t_A} v_0 \sin \alpha_0 + \frac{g}{\gamma} (e^{-\gamma t_A} - 1) = 0.$$

Soluția sa este

$$t_A = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\gamma}{g} v_0 \sin \alpha_0 + 1 \right).$$

Coordonatele punctului de altitudine maximă rezultă prin înlocuirea lui t_A definit ca mai sus în formulele (18.3.20):

$$x_A = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g \left(\frac{\gamma}{g} v_0 \sin \alpha_0 + 1 \right)}$$

$$y_A = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g \left(\frac{\gamma}{g} v_0 \sin \alpha_0 + 1 \right)} + \frac{v_0 \sin \alpha_0}{\gamma \left(\frac{\gamma}{g} v_0 \sin \alpha_0 + 1 \right)} - \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(\frac{\gamma}{g} v_0 \sin \alpha_0 + 1 \right).$$

18.3. ARUNCAREA OBLICĂ ÎN CÂMP GRAVITAȚIONAL (ÎN ATMOSFERĂ)

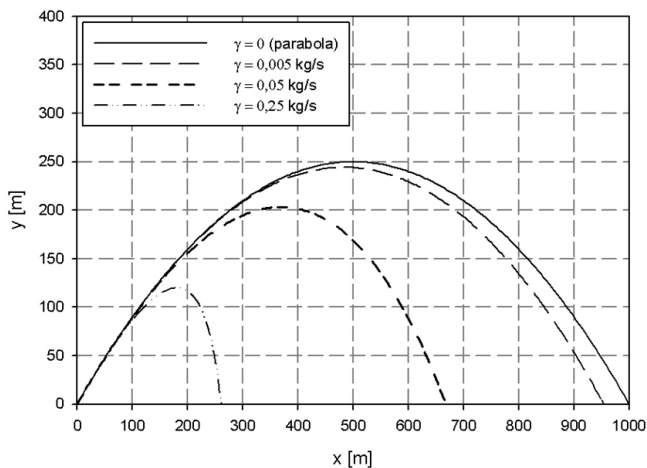


Figura 18.2: Comparație între soluția ideală (18.1.7) și formulele (18.3.20) care iau în considerare frânarea exercitată de aerul atmosferic (trajectoriile reprezentate cu linii întrerupte corespund unor valori diferite de zero ale coeficientului rezistiv γ)

18.4 Abordarea problemei aruncării în atmosferă cu MATHEMATICA

Vom afla soluția parametrică explicita a ecuației diferențiale, și vom vizualiza graficele pentru 20 de valori ale coeficientului de frânare.

_____(*MATHEMATICA*)_____

ecuatia1 =

$$\{\mathbf{x}''[t] + \gamma \mathbf{x}'[t] == 0, \mathbf{x}[0] == 0, \mathbf{x}'[0] == v0 \cos[\alpha 0]\};$$

ecuatia2

$$= \{\mathbf{y}''[t] + \gamma \mathbf{y}'[t] + g == 0, \mathbf{y}[0] == 0, \mathbf{y}'[0] == v0 \sin[\alpha 0]\};$$

sistem = {ecuatia1, ecuatia2};

necunoscute = {x[t], y[t]};

variabila = t;

solutia = {x[t], y[t]}/.DSolve[sistem, necunoscute, t][[1]];

Print["Solutia: ", " x(t) = ", solutia[[1]]]

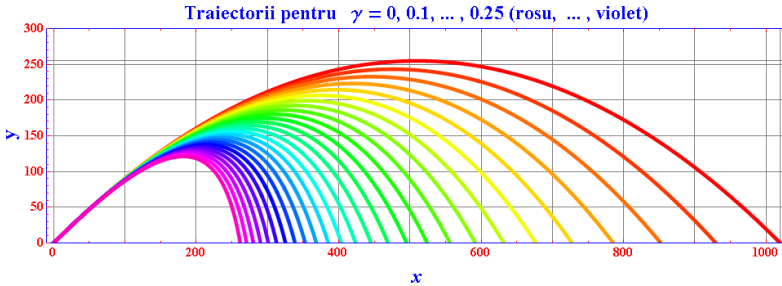
Print[" ", " y(t) = ", solutia[[2]]]

Solutia:
$$x(t) = \frac{e^{-t\gamma} (-1 + e^{t\gamma}) v0 \cos [\alpha 0]}{\gamma}$$

$$y(t) = -\frac{e^{-t\gamma} (g - e^{t\gamma} g + e^{t\gamma} g t \gamma + (v0 \gamma - e^{t\gamma} v0 \gamma) \sin [\alpha 0])}{\gamma^2}$$

Folosind comanda `Plot` vizualizăm graficele a 26 de soluții pentru valori ale coeficientului γ între 0.0 și 0.25 și pentru următoarele valori ale parametrilor:

$$g = 9.80665; \quad \alpha_0 = \pi/4; \quad v_0 = 100.$$



18.5 Mișcarea oscilatorului armonic liniar

Considerăm cazul unui punct material de masă m aflat în mișcare de-a lungul axei Ox sub acțiunea forței elastice

$$F_e = -kx, \quad k > 0, \quad k = \text{const.} \quad (18.5.21)$$

În egalitatea de mai sus,

$$x = x(t), \quad t \geq 0,$$

este coordonata punctului material la un moment oarecare t . Particularizând principiul al doilea al dinamicii pentru această problemă

simplă, obținem ecuația diferențială

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad t \geq 0. \quad (18.5.22)$$

Pentru comoditatea calculelor, este convenabilă definirea așa-numitei pulsații proprii:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (18.5.23)$$

Cu ajutorul acestei mărimi, (18.5.22) se va rescrie sub forma

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad t \geq 0. \quad (18.5.24)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (18.5.24) este

$$x(t) = A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0, \quad (18.5.25)$$

unde A_1 și A_2 sunt constante care se pot determina impunând satisfacerea a două condiții inițiale:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 > 0. \quad (18.5.26)$$

Formula (18.5.25) poate fi oricând adusă la forma echivalentă

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad t \geq 0, \quad (18.5.27)$$

unde

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

și

$$\varphi_0 = -\operatorname{arctg} \frac{A_1}{A_2}$$

sunt amplitudinea, respectiv faza inițială. Expresia (18.5.27) a soluției generale este preferată, fiindcă mărimile A și φ_0 au o interpretare fizică directă.

Aplicând constrângerile (18.5.26) soluției generale (18.5.27), obținem un sistem de două ecuații în necunoscutele A și φ_0 :

$$A \cos \varphi_0 = 0, \quad -\omega_0 A \sin \varphi_0 = v_0.$$

Prin rezolvarea acestuia se obține

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_0}{\omega_0} \\ \varphi_0 &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{18.5.28}$$

După înlocuirea expresiilor (18.5.28) ale constantelor A și φ_0 , formula (18.5.27) devine

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \geq 0,$$

sau, dacă aplicăm proprietățile funcțiilor trigonometrice,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0. \tag{18.5.29}$$

Această ultimă relație definește soluția particulară a ecuației diferențiale (18.5.24) care verifică și condițiile la limită (18.5.26). Formula de mai sus descrie o mișcare armonică, pe care punctul material o execută de o parte și de alta a originii $x = 0$, cu perioada proprie

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{18.5.30}$$

18.6 Abordarea problemei mișcării oscilatorului liniar cu MATHEMATICA

Vom afla soluția ecuației diferențiale, și vom vizualiza graficul ei.

(*MATHEMATICA*)

solutia =

$x[t]/.$ DSolve[{ $x''[t] + \omega_0^2 x[t] == 0$, $x[0] == 0$, $x'[0] == v_0$ }, $x[t]$, t][[1]];

Print["Solutia problemei $x''[t] + \omega_0^2 x[t] == 0$, $x[0] == 0$, $x'[0] == v_0$ "]

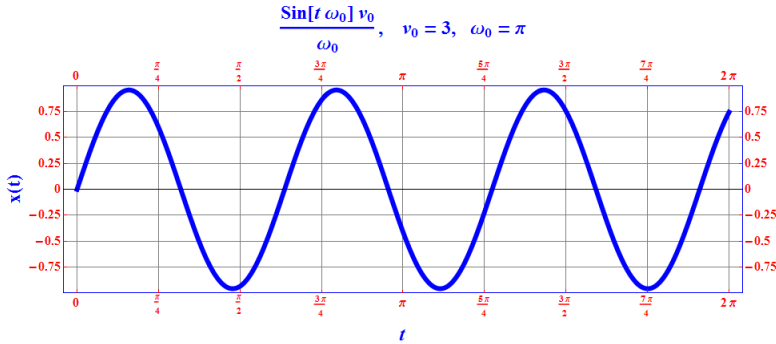
Print["este $x(t) =$ ", solutia]

Solutia problemei

$$x''[t] + \omega_0^2 x[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == v_0$$

este
$$x(t) = \frac{\text{Sin}[t\omega_0] v_0}{\omega_0}$$

Obținem graficul:



18.7 Mișcarea oscilatorului liniar amortizat

O situație mult mai frecvent întâlnită în aplicații este aceea când asupra punctului material de masă m acționează nu numai forța elastică definită de ecuația (18.5.21), ci și o forță de frânare proporțională cu viteza:

$$F_r = -b\dot{x}, \quad b > 0, \quad b = \text{const.}$$

În acest caz, principiul al doilea al dinamicii se exprimă sub forma ecuației diferențiale

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad t \geq 0. \quad (18.7.31)$$

Din nou, pentru comoditatea calculelor, este convenabilă definirea pulsației proprii ω_0 (vezi relația (18.5.23)), precum și a coeficientului de amortizare

$$\gamma = \frac{b}{2m}. \quad (18.7.32)$$

Cu ajutorul acestor mărimi, (18.7.31) se va rescrie sub forma

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad t \geq 0. \quad (18.7.33)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (18.7.33) este

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \geq 0, \quad (18.7.34)$$

unde A_1 și A_2 sunt constante care se determină impunând satisfacerea condițiilor inițiale (18.5.26), iar λ_1 și λ_2 sunt soluțiile așa-numitei ecuații caracteristice,

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

deci

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \\ \lambda_2 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (18.7.35)$$

Punctul material va efectua o mișcare periodică numai atunci când

$$\gamma < \omega_0.$$

Pentru acest caz, soluțiile (18.7.35) se pot rescrie sub forma

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\gamma - i\omega, \\ \lambda_2 &= -\gamma + i\omega, \end{aligned}$$

unde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (18.7.36)$$

Soluția generală (18.7.34) devine atunci

$$x(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t}), \quad t \geq 0. \quad (18.7.37)$$

Întrucât putem găsi oricând două constante reale A și φ_0 care să garanteze satisfacerea egalităților

$$A_1 = \frac{A}{2} e^{-i\varphi_0}, \quad A_2 = \frac{A}{2} e^{i\varphi_0},$$

relația (18.7.37) admite rescrierea sub forma echivalentă

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad t \geq 0. \quad (18.7.38)$$

Aplicând constrângerile (18.5.26) soluției generale (18.7.38), obținem un sistem de două ecuații în necunoscutele A și φ_0 :

$$A \cos \varphi_0 = 0, \quad -\gamma A \cos \varphi_0 - \omega A \sin \varphi_0 = v_0.$$

Prin rezolvarea acestuia se obține

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_0}{\omega} \\ \varphi_0 &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (18.7.39)$$

După înlocuirea expresiilor (18.7.39) ale constantelor A și φ_0 , formula (18.7.38) devine

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad t \geq 0,$$

sau, dacă aplicăm proprietățile funcțiilor trigonometrice,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad t \geq 0. \quad (18.7.40)$$

Comparând soluțiile particulare (18.5.29) și (18.7.40), constatăm următoarele lucruri:

- amplitudinea mișcării oscilatorii amortizate scade exponențial în timp;
- pulsația mișcării oscilatorii amortizate este diferită de pulsația proprie ω_0 și, implicit, perioada

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

diferă de perioada proprie T_0 (vezi relația (18.5.30)).

18.8 Abordarea problemei mișcării oscilatorului liniar amortizat cu MATHEMATICA

Vom afla soluția ecuației diferențiale și vom vizualiza graficul ei.

—————(*MATHEMATICA*)—————

solutia = x[t]/.

DSolve[{x''[t] + 2γ x'[t] + (ω² + γ²)x[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == v₀}, x[t], t][[1]]//ExpToTrig//TrigFactor//FullSimplify;

Print["Solutia problemei"]

Print[" x''[t] + 2γx'[t] + (ω² + γ²)x[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == v₀ "]

Print[" este x(t) = ", solutia]

**18.8. ABORDAREA PROBLEMEI MIȘCĂRII OSCILATORULUI
LINIAR AMORTIZAT CU MATEMATICA**

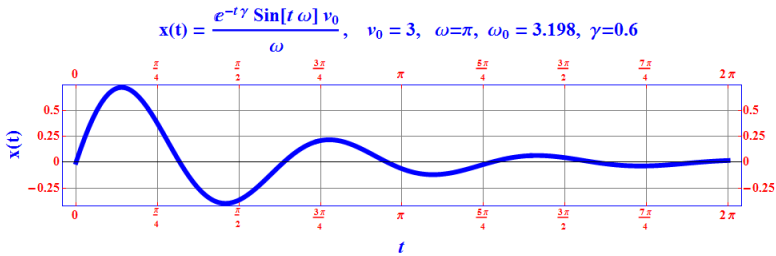
Soluția problemei

$$x''[t] + 2\gamma x'[t] + (\omega^2 + \gamma^2)x[t] = 0, \quad x[0] = 0, \quad x'[0] = v_0$$

este

$$x(t) = \frac{e^{-t\gamma} \operatorname{Sin}[t\omega] v_0}{\omega}$$

Pentru: $\omega = \pi$; $v_0 = 3$; $\gamma = .6$; $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}$, obținem grafi-
cul



* * *

Aplicații

Șaua maimuței, 106
Animație cicloida, 49
Astroid, 72
Astroida, 63
Banda lui Moebius, 93
Calcul integrala dublă, 19
Cardioida, 62
Cicloida, 47
Cilindru, 73, 74
Cissoida lui Diocles, 58
Con, 75
Conoid, 70, 76
Conoid (generatoare), 77
Corpul lui Viviani, 105
Curba corola, 66
Curba morii de vânt, 65
Curba Scarabeu, 64

Elicoid, 78
Elipsoid, 79, 80
Epicycloida, 48
Evolventa cercului, 52
Frontiera bilei Chebysev, 61
Frontiera bilei euclidiene, 59
Frontiera bilei Minkovski, 60
Generarea cicloida, 47
Hiperboloidul cu două pânze,
87
Hiperboloidul cu o pânză, 82,
83
Hiperboloidul cu o pânză (gen-
eratoare eliptice), 85
Hiperboloidul cu o pânză (gen-
eratoare hiperbolice), 84
Hiperboloidul cu o pânză (gen-
eratoare rectilinii), 86

-
- Lantisorul, 55
Lemniscata lui Bernoulli, 54
Normale la o curba, 13
Paraboloidul hiperbolic, 89
Paraboloidul hiperbolic (generatoare), 90
Paraboloidul eliptic, 88
Plane la elice, 103
Pseudosfera, 95
Puncte de extrem, 16
Puncte staționare, 15
Rezolvare ecuații diferențiale, 18
Semi Pseudosfera, 94
Semi-elipsoid, 81
Spirala logaritmică, 56
Tangente la o curba, 11
Tor, 91, 92
Tractricea, 57
Triedrul lui Frenet, 104
- Integrate, 29
Intersecția, 248
InvDr, 160
InvSt, 161
Limit, 26
NSum, 21
Opelem, 126
ParametricPlot, 46
ParametricPlot3D, 71
Plot, 37
Plot3D, 70
RegionPlot, 67
RegionPlot3D, 83
RGBColor, 107
Series, 25
SubspatiuQ, 150
Sum, 21
Suma, 248
- Comanda
- Baza, 222
 - CMYKColor, 107
 - Compatibil, 139
 - ComplementOrtogonal, 221
 - ContourPlot, 59
 - DepLin, 160
 - Derivative, 3
 - Dt, 9